МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
КАРАЧАЕВО-ЧЕРКЕССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени У.Д. АЛИЕВА

Х.Д. Шунгаров

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

ЧАСТЬ - I
(теория, решение задач, программирование)

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Карачаевск – 2016

УДК-519.6
ББК 32.973.26-018.1

Печатается по решению редакционно-издательского совета Карачаево-Черкесского государственного университета им. У.Д. Алиева

Шунгаров Х.Д. Дискретная математика (теория, решение задач, программирование). Часть 1. / Учебное пособие. - Карачаевск: Изд-во КЧГУ, 2016. – 136 с.

ISBN 978-5-8307-0453-3

Представленное учебное пособие содержит теоретический материал и задания по основным темам дискретной математики, и предлагаются тестовые задания для проведения экзамена, практических занятий, также для самостоятельной работы. Учебное пособие составлено в соответствии с программой и предназначено для студентов и аспирантов, обучающихся по всем профилям подготовки бакалавров и магистров направлений «Информатика и вычислительная техника», «Прикладная информатика», «Прикладная математика и информатика» и ряда других специальностей, изучающих дискретную математику. Пособие может быть использовано студентами заочной формы обучения.

Составитель: Шунгаров Х.Д., к. физ.-мат. н., доцент

Рецензенты: М.Х. Чанкаев, к. физ.-мат. н., доцент
Р.А. Бостанов к. физ.-мат. н., доцент

ISBN 978-5-8307-0453-3

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Целью пособия «дискретная математика» является освоение слушателями теоретических основ некоторых вводных тем важных разделов дискретной математики – математической логики, теории множеств, комбинаторики, комбинаторного анализа, теории отношений и теории графов с целью использования знаний в современных информационных технологиях, а также в прикладной научно-исследовательской и образовательной деятельности.

В современных условиях информатизации науки и образования, формирования глобального информационно-коммуникационного пространства к уровню квалификации бакапавров и магистров, а также научно-педагогических кадров предъявляются особые требования, которые, как правило, не обеспечиваются освоением базового курса информатики и информационных технологий. В связи с этим, изучение данного пособия ориентировано на:

− углубление общего информационного образования и информационной культуры будущих преподавателей и исследователей, ликвидацию возможных пробелов в усвоении базового курса прикладной информатики;

− овладение теорией дискретной математики и умение применять её методы для автоматизированного анализа научных данных;

− освоение прикладных технологий для решения разного рода практических задач с использованием современных методов программирования;

− изучение современных методов дискретной математики с использованием электронных средств поддержки образовательного процесса и приемов их интеграции с традиционными учебно-методическими материалами;

− формирование практических навыков решения научно-технических задач.

ВВЕДЕНИЕ

Дискретная математика - это раздел математики, главной спецификой которого является дискретность, т.е. антипод непрерывности. Это раздел математики, не связанный с понятиями бесконечности, предела и непрерывности.

В широком смысле дискретная математика включает в себя такие сложившиеся разделы математики как теория чисел, алгебра, математическая логика, комбинаторика и комбинаторный анализ и т.д. и ряд разделов, такие как, дисретная оптимизация, теория алгоритмов и анализ сложности задач, основы искусственного интеллекта, интеллектуальные системы, многокритериальная дискретная оптимизация, методы проектных решений и их анализ и т.д., которые наиболее интенсивно начали развиваться в середине XX века с внедрением ЭВМ.

Дискретная математика имеет широкий спектр приложений, прежде всего в областях, связанных с информационными технологиями и компьютерами.

В настоящее время интерес к дискретной математике неуклонно растёт. Всё больше в обязательную программу учебных заведений включаются курсы теории множеств, математической логики, комбинаторики, теории графов и их фрагменты.

Специалисты в области современных компьютерных технологий уже осознали, что эти разделы математики являются фундаментом для построения необходимой сейчас хорошей теории математического обеспечения информационных технических систем. Многие специалисты, казалось бы, далёкие от математики, также начинают сознательно знакомиться с их содержанием.

1. АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

1.1. Высказывания и операции над ними

Математическая логика хотя и была создана для анализа основ математики, но в настоящее время она оказывает существенное влияние на развитие самой математики. Из ее идей возникли точные определения свойств алгоритма, что дало возможность решить многие проблемы, которые без этого остались бы в принципе неразрешимыми. Методы математической логики нашли приложение в вопросах конструкций вычислительных машин и автоматических устройств.

Под *предложением* понимается языковое выражение или соединение слов, имеющее самостоятельный смысл.

Предложение, относительно которого имеет смысл говорить, что оно истинно (верно) или ложно (неверно), называется *высказыванием.*

Рассматривая различные высказывания, мы будем предполагать, что они удовлетворяют закону исключенного третьего и закону противоречия, т.е. каждое высказывание или истинно, или ложно, и не может быть одновременно и истинным и ложным. При этом мы не будем вникать в содержание и структуру высказывания. Мы ограничимся лишь тем его свойством, что оно может принимать только два значения: «истину» или «ложь».

Например, высказыванием является предложение - «Целое число делится на три тогда и только тогда, когда сумма цифр этого числа делится на три».

Основной задачей алгебры высказываний является изучение логических форм сложных высказываний с помощью логических операций, т.е. операций, выполняемых над высказываниями и порождаемых новые высказывания.

Пример 1.1. Пусть даны высказывания:

1) «Средняя линия треугольника параллельна основанию и равна ее половине»;

2) «В каждом треугольнике высота делит противоположную сторону пополам».

Мы эти высказывания рассматриваем, не вникая в их содержание, как символы T-«истина» или F-«ложь». Первое из этих высказываний истинно, а второе - ложно. Высказывания принято обозначать прописными буквами латинского алфавита, а их значения: «истина» - T (от английского True-истина), «ложь» - F (от английского False-ложь). Если определить операции над высказываниями, то можно получить из данных высказываний новые.

На совокупности всех высказываний определяется функция истинности, принимающая значения множества {T, F}:

$$\lambda(P)=\begin{cases} T, & \text{если высказывание } P \text{ истинно } (TRUE), \\ F, & \text{если высказывание } P \text{ ложно } (FALSE). \end{cases}$$

Значение λ(P) называется логическим значением истинности высказывания P.

Определены пять операций над высказываниями.

1°. Операция ***отрицания*** **(⌉)**. Эта операция унарна, т. е. распространяется на одно высказывание. Если высказывание ложно, то отрицание этого высказывания истинно, и наоборот.

2°. Операция ***конъюнкции*** **(∧)**. Эта операция бинарна, т. е. она определяет новое высказывание C, исходя из значений двух высказываний A и B, как следующее $C = A \wedge B$. При этом значение высказывания C истинно тогда и только тогда, когда и A и B истинны. В повседневной речи этой операции соответствует соединение высказываний связкой «и».

3°. Операция ***дизъюнкции*** **(∨)**. Данная операция также бинарна, т.е. $C= A\vee B$. Высказывание C истинно, если значение хотя бы одного из высказываний A или B истинно. В обычной речи эта операция соответствует соединению высказываний связкой «или».

4°. Операция ***импликации*** (→) - бинарная операция, т. е. $C = A\rightarrow B$. Высказывание C ложно тогда и только тогда, когда A истинно, а B ложно. Высказывание A называется посылкой, B- следствием, а C - следованием или импликацией. Этой операции в обычной речи соответствует связка «если A, то B» C является ложным лишь тогда, когда A – истинно, а B - ложно. Если A ложно, то высказывание C всегда истинно. Можно сказать, что «из ложного следует все, что угодно».

5°. Операция *эквивалентности* (↔) - бинарная операция, т.е. $C=A\leftrightarrow B$. Высказывание C истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания принимают одинаковые значения истинности, т.е. когда оба высказывания A и B одновременно истинны или оба одновременно ложны.Значения истинностей операций 2 - 5° сведем в таблицу 1.1:

Таблица 1.1.

$\lambda(P)$	$\lambda(Q)$	$\lambda(P\wedge Q)$	$\lambda(P\vee Q)$	$\lambda(P\to Q)$	$\lambda(P\leftrightarrow Q)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

Алгеброй высказываний называется раздел математической логики, изучающий высказывания, рассматриваемые со стороны их логических значений, и логических операций над ними.

Понятие выражения алгебры высказываний определяется следующим (индуктивным) образом:

a) всякая переменная, обозначающая высказывание, есть выражение;

b) если переменные F_1 и F_2 — выражения, то F_1, F_2, $(F_1\wedge F_2)$, $(F_1\vee F_2)$, $(F_1\to F_2)$, $(F_1\leftrightarrow F_2)$ также являются выражениями;

c) других случаев, кроме случаев a) и b), нет.

Внешние скобки в выражениях договариваются не писать.

Если $F(X_1, X_2,..., X_n)$ — выражение алгебры логики, содержащее переменные $X_1, X_2,..., X_n$ и $A_1, A_2, ..., A_n$ — конкретные высказывания, то подставив вместо переменных конкретные высказывания, получим составное высказывание $F(A_1, A_2, ..., A_n)$. Значение истинности этого высказывания $\lambda(F(A_1, A_2, ..., A_n))$ можно определить, если вместо высказываний подставить их значения, а затем выполнить все предписываемые выражением операции, т.е.

$\lambda(F(A_1, A_2, ..., A_n))= F(\lambda(A_1), \lambda(A_2), ..., \lambda(A_n))$.

Например, если $\lambda(A_1)$=T, $\lambda(A_2)$=T, $\lambda(A_3)$=T, то значение истинности составного высказывания $A_1\leftrightarrow A_2\wedge\rceil A_3$ есть

$\lambda((A_1\leftrightarrow A_2)\wedge\rceil A_3)= (\lambda(A_1)\leftrightarrow\lambda(A_2)\wedge\lambda(\rceil A_3))= (T\leftrightarrow F)\wedge F=F$.

Число скобок можно уменьшить, введя соглашения:

1) в выражениях будем опускать внешнюю пару скобок;

2) упорядочим знаки логических операций по старшинству: $\leftrightarrow$, $\to$, \, $\wedge$, $\rceil$. В этом списке знак $\leftrightarrow$ имеет самую большую область действия, а знак $\rceil$ - самую маленькую.

Под областью действия знака операции понимаются те части выражения, к которым применяется рассматриваемое вхождение этого знака. Договоримся опускать во всяком выражении те пары скобок, которые можно восстановить, учитывая «порядок старшинства». Однако, не всякое выражение можно записать без скобок.

1.2. Основные эквивалентности

Существуют выражения, которые принимают значение «истина» независимо от того, какие значения принимают входящие в них переменные. Например,

$A \vee \rceil A$, $A \to A$, $(A \to B) \vee (B \to A)$.

Существуют также выражения, которые принимают значение «ложно» независимо от того, какие значения принимают входящие в них переменные. Например,

$A \wedge \rceil A$, $(A \vee \rceil A) \to (A \wedge \rceil A)$.

Выражение $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ называется тождественно истинным (тождественно ложным), если при любом наборе значений переменных оно обращается в истинное (ложное) высказывание. Тождественно истинные выражения называют тавтологиями (законами), а тождественно ложные - противоречиями.

Два выражения $F_1(X_1, X_2, ..., X_n)$ и $F_2(X_1, X_2, ..., X_n)$ называются эквивалентными, если при любом наборе значений переменных $X_1, X_2, ..., X_n$ выражения F_1 и F_2 принимают одинаковые значения истинности и обозначаются $F_1 \leftrightarrow F_2$.

Теорема 1.1. Следующие выражения тавтологически эквивалентны:

1. $P \vee \rceil P \leftrightarrow T$ (закон исключенного третьего).
2. $\rceil(P \wedge \rceil P) \leftrightarrow T$ (закон отрицания противоречия).
3. $\rceil\rceil P \leftrightarrow P$ (закон двойного отрицания).
4. $P \to P \leftrightarrow T$ (закон тождества).
5. $(P \to Q) \leftrightarrow (\rceil Q \to \rceil P)$ (закон контрапозиции).
6. $(P \to Q) \wedge (Q \to R) \to (P \to R) \leftrightarrow T$ (закон цепного заключения).
7. $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (\rceil P \leftrightarrow \rceil Q)$ (закон противоположности).

8. $(P\wedge Q)\leftrightarrow(Q\wedge P)$ (коммутативность конъюнкции).
9. $(P\vee Q) \leftrightarrow (Q\vee P)$ (коммутативность дизъюнкции).
10. $(P\wedge Q) \wedge R \leftrightarrow P\wedge(Q\wedge R)$ (ассоциативность конъюнкции).
11. $(P\vee Q) \vee R \leftrightarrow P\vee (Q\vee R)$ (ассоциативность дизъюнкции).
12. $P\wedge(Q\vee R) \leftrightarrow (P\wedge Q) \vee (P\wedge R)$ (дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции).
13. $P\vee (Q\wedge R) \leftrightarrow (P\vee Q) \wedge (P\vee R)$ (дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции).
14. $(P\wedge P) \leftrightarrow P$ (идемпотентность конъюнкции).
15. $(P\vee P) \leftrightarrow P$ (идемпотентность дизъюнкции).
16. $(P\rightarrow Q) \leftrightarrow \rceil P\vee Q$
17. $(P\leftrightarrow Q) \leftrightarrow(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)$
18. $P\wedge (Q\vee P) \leftrightarrow P$ (первый закон поглощения).
19. $P\vee (Q\wedge P) \leftrightarrow P$ (второй закон поглощения).
20. $\rceil(P\wedge Q) \leftrightarrow (\rceil P\vee\rceil Q)$ (первый закон де Моргана).
21. $\rceil(P\vee Q) \leftrightarrow (\rceil P\wedge\rceil Q)$ (второй закон де Моргана).
22. $(P\vee Q) \leftrightarrow (\rceil P\rightarrow Q)$
23. $P\vee F \leftrightarrow P$
24. $P\vee T \leftrightarrow T$
25. $P\wedge F \leftrightarrow F$
26. $P\wedge T \leftrightarrow P$

1.3. Вычисление и упрощение логических выражений

Для вычисления и упрощения логических выражений необходимы равносильные преобразования, в основе которых лежит понятие равносильности двух логических выражений.

Два выражения $P(X_1, X_2, ..., X_n)$ и $Q(X_1, X_2, ..., X_n)$ называются *равносильными* и обозначаются $P\equiv Q$, если при любом наборе значений переменных $X_1, X_2, ..., X_n$, они принимают одинаковые значения истинности.

Приведем без доказательства следующую теорему:

Теорема 1.2. Выражение $P\equiv Q$ выполняется тогда и только тогда, когда выражение $P\leftrightarrow Q$ является тавтологией.

Используя утверждение теоремы и тавтологии получим следующие законы равносильностей:
1. $P\vee\rceil P \equiv T$
2. $\rceil(P\wedge\rceil P) \equiv T$

3. $\rceil\rceil P \equiv P$

4. $P \to P \equiv T$

5. $(P \to Q) \equiv (\rceil Q \to \rceil P)$

6. $(P \to Q) \wedge (Q \to B) \to (P \to R) \equiv T$

7. $(P \leftrightarrow Q) \equiv (\rceil P \leftrightarrow \rceil Q)$

8. $(P \wedge Q) \equiv (Q \wedge P)$

9. $(P \vee Q) \equiv (Q \vee P)$

10. $(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$

11. $(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$

12. $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

13. $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

14. $(P \wedge P) \equiv P$

15. $(P \vee P) \equiv P$

16. $(P \to Q) \equiv \rceil P \vee Q$

17. $(P \leftrightarrow Q) \equiv (P \to Q) \wedge (Q \to P)$

18. $P \wedge (Q \vee P) \equiv P$

19. $P \vee (Q \wedge P) \equiv P$

20. $\rceil (P \wedge Q) \equiv (\rceil P \vee \rceil Q)$

21. $\rceil (P \vee Q) \equiv (\rceil P \wedge \rceil Q)$

22. $(P \vee Q) \equiv (\rceil P \to Q)$

23. $P \vee F \equiv P$

24. $P \vee T \equiv T$

25. $P \wedge F \equiv F$

26. $P \wedge T \equiv P$.

Равносильные выражения могут быть заменены одно другим. Это позволяет производить над выражениями преобразования, приводящие их к более простому виду.

Пример 1.2. Упростить выражение:

$(X \to У) \wedge (Y \to X) \wedge (X \wedge \rceil Y) \vee (\rceil X \wedge У)$

Решение. Воспользовавшись законами равносильностей, получим цепочку преобразований:

$(X \to У) \wedge (Y \to X) \wedge (X \wedge \rceil Y) \vee (\rceil X \wedge У) \equiv$

$\equiv (\rceil X \vee Y) \wedge (\rceil Y \vee X) \wedge ((X \wedge \rceil Y) \vee \rceil X) \wedge ((\rceil Y \wedge X) \vee Y) \equiv$

$\equiv (\rceil X \vee Y) \wedge (\rceil Y \vee X) \wedge (\rceil X \vee X) \wedge (\rceil Y \vee \rceil X) \wedge (Y \vee \rceil X) \wedge (Y \vee Y) \equiv$

$\equiv (\rceil X \vee Y) \wedge (\rceil Y \vee X) \wedge (\rceil Y \vee \rceil X) \wedge (Y \vee Y) \equiv$

$\equiv (\rceil (X \vee Y) \wedge (X \vee Y) \wedge (\rceil X \vee \rceil Y) \equiv F \wedge (\rceil X \vee \rceil Y) \equiv F$.

Или можно упростить другим способом:
$(X \to У) \wedge (Y \to X) \wedge (X \wedge \rceil Y) \vee (\rceil X \wedge У) \equiv$
$\equiv (X \to У) \wedge (Y \to X) \wedge (Y \to X) \vee (X \to У) \equiv$
$\equiv (X \leftrightarrow У) \wedge (\rceil\ (Y \to X) \wedge \rceil (X \to У)) \equiv$
$\equiv (X \leftrightarrow У) \wedge \rceil (X \leftrightarrow У) \equiv F.$

1.4. Предикаты и кванторы

Предикатом называется утверждение, содержащее переменные, принимающее значение истины или лжи в зависимости от значений переменных.

Например, утверждение "x – целое число, удовлетворяющее неравенству $x^2 - 5 > 0$ "является предикатом, поскольку данное утверждение истинно, если $x = 3$ и ложно, если $x = 2$. К предикатам можно применять логические операции. В общем случае истинность составного предиката зависит от значений входящих в него переменных и применение к предикатам логических операций превращают их в ложные или истинные высказывания.

Пример 1.3. Выяснить, какие из следующих высказываний истинны, а какие ложны:

a) существует целое число x, удовлетворяющее уравнению $x^2 - 2 = 0$;

b) для любых двух последовательных натуральных чисел x, y их произведение $x \cdot y$ является четным.

Решение.

a) Ложно.

b) Истинно.

В примере 1.3 некоторое свойство присуще *для всех* рассматриваемых объектов, или что найдется (существует) по крайней мере один объект, обладающий данным свойством.

Выражения *"для всех "* и *"найдется"* ("существует") называются, соответственно кванторами общности и существования и обозначаются символами $\forall, \exists$. Как только в предикат включаются кванторы, он превращается в высказывание. Поэтому предикат с кванторами может быть истинным или ложным.

Пример 1.4. Пусть $P(x)$ - предикат " целое число x, и $x^2 - 49 = 0$". Выразить словами высказывание : $\exists x{:}P(x)$ и определить его истинностное значение.

Решение. Высказывание $\exists x{:}P(x)$ означает, что найдется целое число x, удовлетворяющее уравнению $x^2-49=0$. Высказывание истинно, поскольку существуют целые числа $x=7$ и $x=-7$, каждое из которых удовлетворяет уравнению $x^2-49=0$.

Пример 1.5. Пусть $x,y\in R$ и $P(x,y)$ - предикат “ $x+y=0$ ”. Выразить каждое из высказываний словами и определить его истинностное значение:

a) $\forall x\exists y{:}P(x,y)$;

b) $\exists x\forall y{:}P(x,y)$.

Решение. a) Высказывание $\forall x\exists y{:}P(x,y)$ означает, что для любого действительного числа x найдется такое действительное число y, что $x+y=0$. Высказывание истинно, поскольку для каждого числа $x\in R$ существует $y=-x\in R$, которое обращает уравнение $x+y=0$ в тождество.

b) Высказывание $\exists x\forall y{:}P(x,y)$ означает, что существует такое действительное x, что для любого действительного числа y имеет место равенство $x+y=0$. Высказывание ложно.

1.5. Методы доказательства

Необходимость доказательства возникает в том случае, когда нужно установить истинность высказывания $(P\Rightarrow Q)$. Существует несколько стандартных методов доказательства, включающих следующие.

1. Метод прямого рассуждения.

Пусть высказывание P истинно и надо доказать, что Q - истинно. Такой метод доказательства исключает случай, когда импликация $(P\Rightarrow Q)$ ложна, т.е. когда $\lambda(P)=T$, а $\lambda(Q)=F$.

2. Метод обратного рассуждения.

Пусть высказывание Q ложно и надо доказать, что P - ошибочно. Этот метод использует случай, когда методом прямого рассуждения проверяется истинность импликация $\left(\overline{Q}\Rightarrow\overline{P}\right)$, которая эквивалентна импликации $(P\Rightarrow Q)$.

3. Метод “от противного”.

Предполагается, что высказывание P истинно, а Q - ложно. Используя аргументированное рассуждение, получается противоречие. Этот метод использует случай, когда ложна импликация $(P \Rightarrow Q)$, т.е. когда $\lambda(P)=T$, а $\lambda(Q)=F$.

Пример 1.6. Показать методом прямого рассуждения, что произведение $x \cdot y$ любых двух нечетных целых чисел $x, y \in Z$ является нечетным.

Решение. Любое нечетное целое число и, в частности $x \in Z$, можно записать в виде $x=2p+1$, где $p \in Z$. Аналогично $y=2q+1$, где $q \in Z$. Тогда

$x \cdot y=(2p+1)(2q+1)=4pq+2p+2q+1=2(2pq+p+q)+1=$

$=2k+1 \in Z$ - нечетное число, где $k=2pq+p+q \in Z$.

Пример 1.7. Пусть $n \in N$ - натуральное число. Показать методом обратного рассуждения, что если n^2 нечетно, то и n нечетно.

Решение. Обозначим через P - “n^2 - нечетное число”, а через Q -“n - нечетное число”, тогда $\neg P$ -“n^2 - четное число”, а через $\neg Q$ -“n - четное число”. Теперь с помощью метода прямого рассуждения надо доказать, что верно утверждение “если n - четное число, то n^2 - четное число”. Поскольку n - четное число, то $n=2p$ для некоторого числа $p \in Z$. Тогда

$n^2=n \cdot n=2p \cdot 2p=4p^2=2\left(2p^2\right)=2k \in Z$ - четное число, где $k=2p^2 \in Z$.

Пример 1.8. Методом “от противного ” доказать, что решение уравнения $x^2=2$ является иррациональным числом, т.е. не может быть записано в виде несократимой дроби с целыми числителем и знаменателем.

Решение. Пусть решение уравнения $x^2=2$ является рациональным числом. Это означает, что решение уравнения $x^2=2$ может быть записано в виде несократимой дроби с целыми числителем и знаменателем: $x=\frac{m}{n}, m, n \in N$, где $(m,n)=1$. Подставляя значение x, получим: $x^2=\frac{m^2}{n^2}=2$. Откуда $m^2=2n^2$. Из последнего равенства следует, что m - четное число и может представлено в виде $m=2p, p \in Z$. Подставляя значение m в равенство $m^2=2n^2$, получим: $2p^2=n^2$. Отсюда следует, что n^2 - четное число, а также и n - четное число. Поэтому n можно представить в виде $n=2k, k\in Z$. Отсюда и из выше изложенного следует, что дробь $x=\frac{m}{n}=\frac{2p}{2k}=\frac{p}{k}$ - сократимая. Получили противоречие с предположением. Следовательно, решение уравнения $x^2=2$ не может быть рациональным числом.

4. *Метод математической индукции.*

Пусть $P(n)$ - некоторое утверждение, зависящее от целого числа n, например, "n умножить на $(n+3)$- четное число". Метод математической индукции применим в том случае, когда имеется формула, выражающая P_n и нужно доказать справедливость этой формулы для любого целого положительного числа n.

Метод математической индукции состоит в следующем:

a) доказать, что P(1) верно;

b) доказать, что "если $P(1), P(2), ..., P(n)$ верны", то $P(n+1)$ также верно. Тогда это утверждение верно для любого целого положительного числа n.

*Пример 1.9.*Доказать, что $\forall n\in N$ верны равенства:

a) $1+2+3+4+5+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$;

b) $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

c) $1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$;

d) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$.

Решение. a) $P(1)$:1=1-верно.

$P(2)$:$1+2=\frac{1(1+2)}{2}\Leftrightarrow 3=3$- верно.

Предположим, что $\forall k<n: P(n-1)=1+2+...+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$.

Докажем, что $P(n)$- верно. Имеем:

$P(n)=(1+2+...+(n-1))+n=\frac{n(n-1)}{2}+n=\frac{n^2+n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$- верно. Отсюда следует, что равенство a) верно $\forall n \in N$.

Пример 1.10. Рассмотрим следующие известные равенства

$$1=1^2$$
$$1+3=2^2 \qquad (1.3)$$
$$1+3+5=3^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots..$$

В общем виде эти равенства можно записать

$$1+3+5+7+...+(2n-1)=n^2. \qquad (1.4)$$

Докажем, что (1.4) верно для любого целого положительного числа n. Согласно описанному выше методу имеем:

a) $P(1)$-верно;

b) если утверждения $P(1), P(2), ..., P(n)$ верны, то в, частности, верно и $P(n)$. Следовательно, выполняется соотношение b). Прибавив $(2n+1)$ к обеим частям уравнения (1.4), получим $1+3+5+7+...+(2n-1)+(2n+1)=n^2+(2n+1)=(n+1)^2$. Таким образом, $P(n+1)$ также справедливо. Следовательно, утверждение $P(n)$ - (1.4) верно для любого целого положительного числа n.

Пример 1.11. Доказать, что верно следующее утверждение:

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}+\ldots+\frac{(-1)^n x(x-1)...(x-n+1)}{n!}=(-1)^n\frac{(x-1)(x-2)...(x-n)}{n!}. \qquad (1.5)$$

Решение. Докажем методом математической индукции.

Для $n=1$ и $n=2$ формула (1.5) верна. Предположим, что формула (1.5) верна для всех натуральных чисел $k \le n-1$. Согласно предположению имеем, что верна формула:

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1} x(x-1)...(x-n+2)}{(n-1)!}=(-1)^{n-1}\frac{(x-1)(x-2)...(x-n+1)}{(n-1)!}.$$

Тогда имеем:

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x(x-1)...(x-n-2)}{(n-1)!}+(-1)^n\frac{x(x-1)...(x-n+1)}{n!}=$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{(x-1)(x-2)...(x-n-1)}{(n-1)!}+(-1)^n\frac{x(x-1)...(x-n+1)}{n!}=$$

$$=(-1)^n\frac{(-n+x)(x-1)(x-2)...(x-n+1)}{n!}=(-1)^n\frac{(x-1)...(x-2)}{n!}.$$

Таким образом, формула (1.5) верна для следующего натурального числа n. Следовательно, формула (1.5) верна для любого натурального числа n.

Пример 1.12. Рассмотрим следующие известные равенства

$1^3=(1)^2$

$1^3+2^3=(1+2)^2$

$1^3+2^3+3^3=(1+2+3)^2$, и т.д..

В общем виде эти равенства можно записать

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2. \qquad (1.6)$$

Докажем, что верно (1.6). Поскольку левая часть (1.5) есть S_n^3, а правая - $\left(S_n^1\right)^2$. Тогда имеем: $\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Задачи и упражнения.

1. Определить значения истинности следующих высказываний:
   а) число 2 четное или это число простое;
   б) $2\le 3$ или $2\ge 3$, и $2\cdot 2\ge 4$;
   в) $2\cdot 2=4$ или обезьяны живут на крайнем севере.
2. Установить, какие из высказываний в следующих парах являются отрицаниями друг друга и какие нет:
   а) «Функция f нечетна», «Функция f четна»;
   б) «Все простые числа нечетны», «Все простые числа четны»;
   в) «Все простые числа нечетны», «Существует простое четное число».
3. Какие из следующих предложений являются высказываниями:
   а) треугольник ABC подобен треугольнику A′B′C′;
   б) Луна есть спутник Юпитера;
   в) $2+\sqrt{7}-\sqrt[4]{3}$;
   г) кислород – газ;
   д) каша – вкусное блюдо;
   е) математика – интересный предмет;
   ж) картины Пикассо слишком абстрактны;
   з) железо тяжелее свинца;
   и) треугольник называется равносторонним, если все его

стороны равны;

к) если в треугольнике все углы равны, то он равносторонний;

л) Да здравствует 1 мая!

м) сегодня хорошая погода;

н) в романе А.С. Пушкина «Евгений Онегин» 136245 букв.

Решение:

а) предложение не является высказыванием потому, что не знаем истинно оно или ложно и о каких треугольниках идет речь;

б) предложение является высказыванием и это высказывание ложно;

в) $2+\sqrt{7}-\sqrt[4]{3}$ не является высказыванием, так как мы не можем определить истинно оно или ложно.

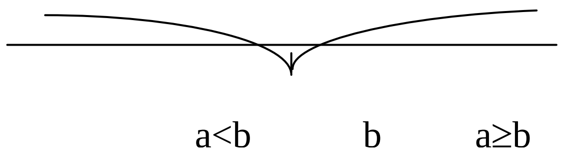
4. Следующие высказывания записать без знака отрицания:

а) $\neg(a<b)$; б) $\neg(a\geq b)$; в) $\neg(a\leq b)$; г) $\neg(a>b)$.

Решение:

а) $\neg(a<b)=(a\geq b)$

б) $\neg(a\geq b)=a<b$



5. Сформулировать и записать в виде конъюнкции или дизъюнкции условие истинности каждого предложения (a, b – действительные числа):

a) $a\cdot b\neq 0$; b) $a\cdot b=0$; c) $a^2+b^2=0$; d) $\frac{a}{b}=0$; e) $|a|=3$; f) $|a|<3$;

g) $|a|>3$; h) $a^2+b^2\neq 0$; i) $\frac{a}{b}\neq 0$.

Решение:

a) $a\cdot b\neq 0$, если $a\neq 0$ и $b\neq 0$.Если $(a\neq 0)\wedge(b\neq 0)$ то $a\cdot b\neq 0$

b) $a\cdot b=0$, если $a=0$ или $b=0$. Если $(a=0)\vee(b=0)$ то $a\cdot b=0$

c) $a^2+b^2\neq 0$, если $a\neq 0$ и $b\neq 0$.Если $(a\neq 0)\wedge(b\neq 0)$ то $a^2+b^2\neq 0$

d) $\frac{a}{b}=0$, если $a=0$ и $b\neq 0$.Если $(a=0)\wedge(b\neq 0)$ то $\frac{a}{b}=0$

e) $|a|=3$, если a=-3 или a=3.Если $(a=-3)\vee(a=3)$ то $|a|=3$

6. Установить, какие из высказываний в следующих парах являются отрицаниями друг друга и какие нет:

a) $2<0$, $2>0$;

b) $6<9$, $6\geq 9$;

c) «Треугольник ABC - прямоугольный», «Треугольник ABC - тупоугольный»;

7. Определить значения истинности следующих высказываний:
   a) Ленинград расположен на Неве и 3+4=7;
   b) 7-простое число и 9 – простое число;
   c) 7-простое число или 9 – простое число;

   Решение:

   a) Обозначим через A – высказывание «Ленинград расположен на Неве», а через B – «3+4=7».Так как $\lambda(A) = T$ и $\lambda(B) = T$, то $\lambda(A \wedge B) = T$.

8. Доказать, что $\forall n \in N$ верны равенства:
   a) $1+5+9+...+(4n-3)=n(2n-1)$;
   b) $\forall n \in N$ число n^3-n делится на 3;
   c) $\forall n \in N$ число 7^n-1 делится на 3;
   d) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$.

9. Составить программу, которая выводит таблицу истинностей для логических функций.

10. Составить программу, которая проверяет два выражения на равносильность.

2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

2.1. Множества

Понятие множества принадлежит к числу фундаментальных неопределяемых понятий в математике. Под множеством понимается любая определенная совокупность некоторых объектов, объединенных некоторым признаком. Объекты, из которых составлено множество, называются его элементами. Множества обычно обозначают большими буквами алфавита A, B, X ,Y, Z, W . Элементы, входящие в множество, обозначаются малыми буквами a, b, x, y, z.

Например, множество {1,2,3,4,5} можно задать следующим образом: {1,2,3,4,5}= {x: x - *целое число из интервала* [1,5]}. Можно сказать, что *множество – это совокупность объектов.*

Пример 2.1. Множество N натуральных чисел; множество Z целых чисел; множество Q рациональных чисел; множество R действительных (вещественных) чисел; множество C комплексных чисел.

Если x– элемент множества M , то говорят, что x принадлежит M $(x \in M)$. В противном случае x не принадлежит M $(x \notin M)$.

Множества могут быть элементами других множеств. Множество, элементами которого являются множества, называется классом или семейством. Семейства множеств обычно обозначают прописными “рукописными ” буквами латинского алфавита. Множество, не содержащее элементов, называется пустым (Ø).

Элементы всех множеств берутся из некоторого одного достаточно широкого множества U , которое называется универсальным множеством (универсумом). Таким образом, универсальное множество U содержит в себе все множества и любое множество является подмножеством универсального множества. Например, можно записать:

$$\varnothing \subseteq \mathrm{N} \subseteq \mathrm{Z} \subseteq \mathrm{Q} \subseteq \mathrm{R} \subseteq \mathrm{C} \subseteq \mathrm{U}.$$

2.2.Способы задания множеств

Множество можно задать различными способами:

1) перечислением элементов $M := \{m_1, m_2, ..., m_n\}$;

2) характеристическим предикатом $M := \{x / P(x)\}$;

3) порождающей процедурой $M := \{x := f\}$.

Характеристическим предикатом называется некоторое условие, выраженное в виде логического выражения или процедуры, возвращающей логическое значение. Если для данного элемента условие выполнено, то он принадлежит определенному множеству и не принадлежит в противном случае.

Порождающей процедурой называется процедура, которая, будучи запущенной, порождает некоторые объекты – элементы определенного множества.

Пример 2.2.

1) $M := \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$;

2) $M := \{x / (x \in Z) \wedge (x \leq 50)\}$;

3) $M := \{n / \ for\ n := 1\ to\ 100\ do\}$.

2.3. Сравнение множеств. Операции над множествами

Множество А содержится в множестве В (множество В включает множество А), если каждый элемент А есть элемент В: $A \subset B := x \in A \Rightarrow x \in B$.

В этом случае А называется подмножеством В, а В – надмножеством А. Если $A \subset B$ и $A \neq B$, то А называется собственным подмножеством В. Кроме того, любое множество А является подмножеством самого себя: $\forall A \ \ A \subset A$.

Из определения также следует, что пустое множество Ø является подмножеством любого множества: $\forall A \ \ \varnothing \subset A$.

Два множества считаются равными, если они состоят из одних и тех же элементов. Два множества *A* и *B* равны, если они являются подмножествами друг друга: $A = B := (A \subset B) \wedge (B \subset A)$.

Объединением множеств А и В называется множество $A \cup B := \{x / (x \in A) \vee (x \in B)\}$.

Пересечением множеств А и В называется множество $A \cap B := \{x / (x \in A) \wedge (x \in B)\}$.

Разностью множеств А и В называется множество $A \setminus B := \{x / (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$.

Симметрической разностью множеств A и B называется множество $A\Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Для наглядного представления отношений между подмножествами универсального множества используются диаграммы Эйлера – Венна (рис. 2.1.).

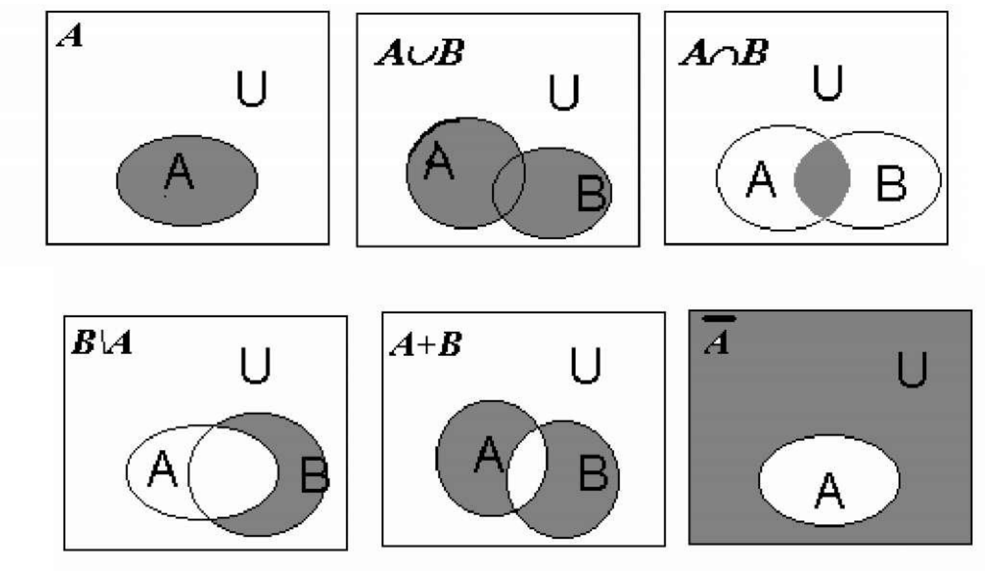


Рис. 2.1. Диаграммы Эйлера - Венна.

Операции объединения и пересечения допускают следующее обобщение. Пусть I – множество индексов и для любого индекса $i \in I$ определено A_i. Тогда

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \,/\, \exists i \in I (x \in A_i)\}, \quad \bigcap_{i \in I} A_i := \{x \,/\, \forall i \in I (x \in A_i)\}.$$

2.4. Разбиения и покрытия

Пусть $\varepsilon = \{E_i\}_{i \in I}$ - некоторое семейство подмножеств множества M, $E_i \subset M$. Семейство $\varepsilon = \{E_i\}_{i \in I}$ называется покрытием множества M, если каждый элемент M принадлежит хотя бы одному из множеств $E_i : M \subset \bigcup_{i \in I} E_i \Leftrightarrow (\forall x \in M)(\exists i \in I) x \in E_i$

Семейство $\varepsilon = \{E_i\}_{i \in I}$ называется дизъюнктивным покрытием множества M, если элементы этого семейства попарно не пересекаются, т.е. каждый элемент множества M принадлежит только одному подмножеству из $E_i : (\forall i, j \in I)(i \neq j) \Rightarrow E_i \cap E_j = \varnothing$.

Дизъюнктивное покрытие $\varepsilon=\{E_i\}_{i\in I}$ называется разбиением множества M.

Пример 2.3. Пусть $M{:}M=\{a_1,a_2,,a_3\}$. Тогда семейство $\varepsilon_1=\{\{a_1,a_2\},\{a_2,a_3\},\{a_1,a_3\}\}$ является покрытием, но не разбиением; семейство $\varepsilon_2=\{\{a_1\},\{a_2\},\{a_1\}\}$ является и разбиением и покрытием, а семейство $\varepsilon=\{\{a_2\},\{a_3\}\}$ не является ни разбиением, ни покрытием.

2.5. Алгебра подмножеств. Булеан

Множество всех подмножеств множества M называется булеаном и обозначается 2^M: $2^M := \{A/\,A\subset M\}$.

Теорема 2.1. Для любого конечного множества M справедливо равенство:

$$\left|2^M\right|=2^{|M|}. \tag{2.1}$$

Доказательство. Доказательство проведем методом математической индукции. Если $|M|=0$, то $M=\varnothing$ и $2^{\varnothing}=\{\varnothing\}$. Тогда для $|M|=0$ равенство (2.1) примет вид: $1=2^0$. Пусть $M:M=\{a_1,a_2,...,a_k\},|M|=k$.

Предположим, что $\forall M:|M|<k$ имеет место равенство $\left|2^M\right|=2^{|M|}$. Разобьем множество M на два таких подмножества $M_1=\{X\subset 2^M\,/\,a_k\in X\}$, $M_2=\{X\subset 2^M\,/\,a_k\notin X\}$, что $2^M=M_1\cup M_2$ и $M_1\cap M_2=\varnothing$. По индуктивному предположению имеем: $|M_1|=2^{k-1},|M_2|=2^{k-1}$. Отсюда следует, что $\left|2^M\right|=|M_1|+|M_2|=2^{k-1}+2^{k-1}=2^k=2^{|M|}$. Теорема 2.1 доказана.

Пересечение, объединение и разность подмножеств множества U являются подмножествами U. Множество всех подмножеств множества U с операциями пересечения, объединения, разности и дополнения образуют алгебру подмножеств множества U.

2.6. Свойства операций над множествами

Операции над множествами имеют следующие приоритеты в порядке убывания: операция дополнения, операция пересечения, операция объединения. Отметим следующие основные законы для операций над множествами:

1. Идемпотентность:

$A \cup A = A, A \cap A = A$.

2. Коммутативность:

$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$.

3. Ассоциативность:

4. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

5. Дистрибутивность:

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (B \cup C) \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (B \cap C)$.

6. Поглощение

$(A \cup B) \cap A = A \qquad (A \cap B) \cup A = A$.

7. Свойства нуля:

$A \cup \varnothing = A; \qquad A \cap \varnothing = \varnothing$.

8. Свойства единицы:

$A \cup U = U \qquad A \cap U = A$.

9. Двойное дополнение: $\overline{\overline{A}} = A$.

10. Свойства дополнения:

$A \bigcup \overline{A} = U \qquad A \bigcap \overline{A} = \varnothing$.

11. Законы двойственности (законы Де – Моргана)

12. $\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B} \qquad \overline{A \bigcap B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}$.

Декартовым или прямым произведением множеств A и B называется множество $\grave{A} \times \hat{A} := \{(a,b)/(a \in A) \wedge (b \in B)\}$.

Пример 2.4. Найти пересечение, объединение, разности и прямое (декартово) произведение множеств *A и B*.

а) $A = \{-1;0;3;4\}$, $B = \{0;4;6\}$

$A \cup B = \{-1;0;3;4;6\}$.

$A \cap B = \{0;4\}$.

$A \backslash B = \{-1;3\}$; $B \backslash A = \{6\}$

$A \times B = \{(-1,0), (-1,4), (-1,6), (0,0), (0,4), (0,6), (3,0), (3,4), (3,6), (4,0), (4,4), (4,6)\}$.

б) $A = [0;2]$, $B = [1;5]$.

$A \cup B = [0;5]$

$A \cap B = [1;2]$

$A \backslash B = [0;1); \qquad B \backslash A = (2;5]$

$A \times B$ = {$(x;y)$| $x \in [0;2]$, $y \in [1;5]$}.

Множество всех подмножеств множества *A* называется множеством-степенью и обозначается *p(A)*.

Заметим, что:

а) $X \subseteq X$; б) если $X \subseteq Y$, $Y \subseteq Z$, то $X \subseteq Z$;

b) если $X \subseteq Y$, $Y \subseteq X$, то $X = Y$.

Не надо смешивать отношения принадлежности и включения. Хотя $1 \in \{1\}, \{1\} \in \{\{1\}\}$, не верно, что $1 \in \{\{1\}\}$, так как единственным элементом множества $\{\{1\}\}$ является $\{1\}$.

Пример 2.5. Равны ли следующие множества:

1) $\{2,4,5\}$ и $\{2,4,5,2\}$;
2) $\{1,2\}$ и $\{\{1,2\}\}$;
3) $\{1,2,3\}$ и $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$;
4) $\{\{1,2\},3\}$ и $\{\{1\}, \{2,3\}\}$.

Решение. Для доказательства равенства произвольных множеств нужно проверить, что первое множество включено во второе, а второе, в свою очередь, включено в первое, т.е. любой элемент первого множества является элементом второго множества, а любой элемент второго множества является элементом первого множества.

Проверка дает положительный результат для множеств из пункта 1). Множества из пункта 2) не равны, так как, например, элемент 1 из первого множества не имеет себе равного во втором множестве. Второе множество состоит из единственного элемента - множества $\{1,2\}$. Множества, указанные в пункте 3), не равны, так как элементами первого множества являются числа *1,2,3,* а элементами второго множества являются множества, состоящие из одного элемента $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$. Пункт 4) выполнить самостоятельно.

Пример 2.6. Следующие множества заданы перечислением своих элементов. Задать эти множества с помощью характерного для их элементов свойства: *A* = {2,4,6,8,...,100};
K = {Карачаевск, Теберда, Кисловодск, Усть-Джегута, Черкесск}.

Решение. Множество *A* представляет собой множество четных натуральных чисел от 1 до 100, поэтому это множество можно записать в виде $A = \{x \in N : x = 2n, n = 1,2,...,100\}$. Множество *K* представляет собой множество городов Карачаево -

Черкесской республики, т.е. это множество можно записать в виде $K = \{x : x -$ город КЧР$\}$.

Пример 2.7. Привести примеры таких множеств *A, B, K* , для которых

1) $A \in B, B \in K, A \notin K$;

2) $A \in B, B \in K, A \notin K$;

3) $A \in B, B \notin K, A \subseteq K$;

4) $A \subseteq B, B \in K, A \notin K$.

Решение. 1). Например, можно рассмотреть следующие множества: $A = \{1,2\}$, $B = \{\{1,2\},1\}$, $K = \{3,\{\{1,2\},1\}\}$.

3). Например, можно рассмотреть следующие множества: $A = \{2,3\}$, $B = \{\{1\}, \{2,3\}\}$, $K = \{2,3,4\}$.

Пункты 2) , 4) рассмотреть самостоятельно.

Пример 2.8. Доказать методом встречных включение и продемонстрировать на диаграммах Эйлера-Венна (Рис. 2.2) :

$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Обозначим левую часть *X*, правую часть *У*.

Докажем, что $X = Y$.

1. Сначала докажем, что $X \subseteq Y$. Пусть выбран произвольный элемент $x \in X$, т.е. $x \in À \setminus (B \cup C)$. Это означает, что $(x \in À) \vee (x \notin (B \cup C))$, откуда следует $(x \in À) \vee ((x \notin B) \wedge (x \notin C))$. *Из последнего выражения следует, что* $(x \in À \setminus B) \wedge (x \in A \setminus C))$, следовательно, $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C) = Y$. Так как элемент *x* выбран произвольно, то $X \subseteq Y$.

2. Докажем теперь, что $Y \subseteq X$. Пусть выбран произвольный элемент $y \in Y$, т.е. $y \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C) = Y$. Это означает, что $((y \in À) \wedge (y \notin B)) \vee ((y \in A) \wedge (y \notin C))$.

Отсюда следует, что $(y \in À) \wedge (y \notin B \cap C)$, следовательно, $y \in À \setminus (B \cup C) = Y$. Так как элемент *y* выбран произвольно, то $Y \subseteq X$. Из 1. и 2. следует, что $X = Y$ (рис.2.2).

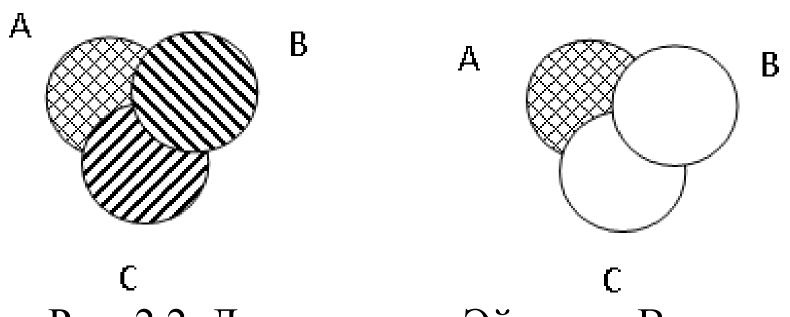


Рис. 2.2. Диаграммы Эйлера – Венна.

Пример 2.9. Доказать следующие тождества:

1) $A\backslash B = A\cap\overline{B}$;

2) $A\cup(B\backslash K) = (A\cup B)\cap\left(B\cap\overline{K}\right)$;

3) $A\cup(B\backslash K) = (A\cup B)\cap\left(B\cap\overline{K}\right)$;

4) $B\cap(A\backslash B) = \varnothing$;

5) $A\cap(B\oplus K) = (A\cap B)\oplus(A\cap K)$.

Решение. I способ. Для доказательства равенства 1) докажем два включения: $A\backslash B\subseteq A\cap\overline{B}$, $A\cap\overline{B}\subseteq A\backslash B$. Проведем доказательство первого включения. Пусть x - *произвольный элемент, принадлежащий левой части* первого включения, т.е. $x\in(A\backslash B)$. После цепочки преобразований получим

$$x\in(A\backslash B)\Rightarrow(x\in A)\wedge(x\notin B)\Rightarrow(x\in A)\wedge\left(x\in\overline{B}\right)\Rightarrow x\in A\cap\overline{B}\Rightarrow A\backslash B\subseteq A\cap\overline{B}$$

Доказательство второго включения проведем аналогично:

$$x\in A\cap\overline{B}\Rightarrow(x\in A)\wedge\left(x\in\overline{B}\right)\Rightarrow(x\in A)\wedge(x\notin B)\Rightarrow x\in(A\backslash B)\Rightarrow x\in(A\backslash B).$$

II способ. Тождество 2) докажем, используя уже доказанное тождество 1) и основные законы 1)-12). Для удобства при данном способе доказательства вверху над равенствами будем писать n), где n - это номер используемого тождества. Итак,

$$A\cup(B\backslash K)\overset{1)}{=}A\cup\left(B\cap\overline{K}\right)\overset{5)}{=}(A\cup B)\cap\left(B\cap\overline{K}\right).$$

Аналогично можно доказать равенства 3), 4), 5). Для равенства 4) приведем еще один способ доказательства - доказательство от противного.

III способ. Предположим противное тому, что требуется доказать. Пусть $B\cap(A\backslash B)\neq\varnothing$, т. е. существует хотя бы один элемент $x\in(B\cap(A\backslash B))\Rightarrow(x\in B)\wedge(x\in A\backslash B)\Rightarrow(x\in B)\wedge((x\in A)\wedge(x\notin B))\Rightarrow$ $\Rightarrow(x\in B)\wedge(x\notin B)$. Никакой элемент x не может одновременно принадлежать и не принадлежать одному множеству. Получили противоречие. Следовательно, равенство 4) верно.

Пример 2.10. Пусть A,B,K - такие множества, что $B\subseteq A\subseteq K$. Найти множество X, удовлетворяющее системе уравнений

$$\begin{cases}A\cap X=B\\ A\cup X=K\end{cases}.$$

Решение. Из первого уравнения следует, что $B \subseteq X$, поэтому X можно представить в виде $X = B \cup X'$, где $X' \cap B = \emptyset$. Из равенств $A \cap X = B, X = B \cup X', X' \cap B = \emptyset$ следует, что $A \cap X' = \emptyset$. Заменим X во втором уравнении на $X = B \cup X'$. Получим $A \cup (B \cup X') = K$. По закону ассоциативности $(A \cup B) \cup X' = K$. Из включения $B \subseteq A$ следует, что $A \cup B = A$. Получаем равносильное уравнение $A \cup X' = K$. Два факта $A \cap X' = \emptyset$ и $A \subseteq K$ позволяют заключить, что решением последнего уравнения является множество $X' = K \setminus A$. Окончательно $X = B \cup (K \setminus A)$.

Пример 2.11. Доказать, что условие $A \subseteq B$ равносильно каждому из следующих условий: 1) $A \cap B = A$; 2) $A \cap B = B$.

Решение. Докажем, что $A \subseteq B$ равносильно условию 1). Докажем равенство $A \cap B = A$ в два включения.

Пусть $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$. Обратно, пусть

$x \in A \Rightarrow (x \in A) \wedge (A \subseteq B) \Rightarrow (x \in A) \wedge (x \in B) \Rightarrow x \in A \cap B$.

Пусть выполнено условие 1). Докажем , что $A \subseteq B$.

Рассмотрим $(x \in A) \wedge (A \subseteq B) \Rightarrow (x \in A) \wedge (x \in B) \Rightarrow (x \in B) \Rightarrow (A \subseteq B)$.

Равносильность условия $A \subseteq B$ условию 1) мы доказали, равносильность условию 2) докажите самостоятельно.

Пример 2.12. Доказать для произвольных множеств *A, B, K*:

1) если $A \not\subset B$ *и* $A \cap K = \emptyset$, то $A \cup K \not\subset B \cup K$;

2) если $B \cap K = \emptyset$ и $A \cap K \neq \emptyset$, то $A \setminus B \neq \emptyset$.

Решение.

1) Надо доказать, что существует хотя бы один элемент x' такой, что $(x' \in A \cup K) \wedge (x' \notin B \cup K)$. Известно, что *если* $A \not\subset B$, то существует некоторый элемент $(x' \in A) \wedge (x' \notin B)$. В силу условия $A \cap K = \emptyset$, данный элемент $x' \notin K$. Таким образом, $(x' \in A \cup K) \wedge (x' \notin B \cup K) \Rightarrow A \cup K \not\subset B \cup K$.

2) Надо доказать, что существует хотя бы один элемент в множестве $A \setminus B$. Известно, что если $A \cap K = \emptyset$, то существует элемент $(x' \in A) \wedge (x' \in K)$, причем, в силу условия $B \cap K = \emptyset$, данный элемент $x' \notin B$. Таким образом, существует элемент $x' : (x' \in A) \wedge (x' \notin B) \Rightarrow A \setminus B$.

Пример 2.13. Доказать, что для произвольных множеств *A, B* справедливо равенство $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.

Решение. Доказательство проведем в виде двух включений, объединив их одной записью. Пусть X - *произвольный элемент, принадлежащий левой части* данного равенства. Тогда имеем

$X \in P(A \cap B) \Leftrightarrow X \subseteq A \cap B \Leftrightarrow (X \subseteq A) \wedge (X \subseteq B) \Leftrightarrow (X \in P(A)) \wedge X \in P(B) \Leftrightarrow$
$X \in P(A) \cup P(B)$.

Задачи и упражнения

1. Каждое из следующих множеств задать в виде некоторого интервала числовой прямой:

1) $\{x \in R : \exists y \in R : x^2 + y^2 = 1\}$;

2) $\left\{x \in R : \exists y \in R : x = \dfrac{y+1}{y^2+1}\right\}$;

3) $\{a \in R : \exists y \in R : 3x^2 + 2ax + a < 0\}$.

2. Вставить между множествами символ $\in$ или $\subseteq$ так, чтобы получилось истинное утверждение.

1) {1} {1, {1,2}};
2) {1,2} {1,2,{1}, {2}};
3) {1,2} {1,2,{1,2}};
4) Ø {1,2, {1}, {Ø}};
5) Ø {Ø};
6) Ø {{Ø}}.

3. Перечислить элементы каждого из следующих множеств:

1) $\{x : x \in \{1\}\}$;
2) $\{x : x \in \{1,2,3\}, 2, 3\}$;
3) $\{x : x \subseteq \varnothing\}$.

4. Доказать следующие тождества:

1) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \oplus B$;

2) $(A \setminus B) \cup (\overline{A} \setminus \overline{B}) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;

3) $(A \setminus \overline{B}) \cup (\overline{A} \setminus B) = (A \cup \hat{A}) \setminus (A \cap B)$;

4) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;

5) $B \cup (A \setminus B) = A \cup B$;

6) $(A \oplus B) \oplus K = A \oplus (B \oplus K)$;

7) $A \oplus A = \varnothing$.

4. Считая *A* универсальным множеством для данного рассмотрения, найти множество *X,* удовлетворяющее следующим условиям:

1) $A \setminus X = A$;
2) $A \cap X = \varnothing$.
3) $A \cup X = A$;
4) $A \setminus (A \setminus X) = \varnothing$;
5) $A \setminus X = \varnothing$,
6) $A \cup X = A$;
7) $\overline{A} \cap \overline{X} = \varnothing$.

5. Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} A \setminus X = B \\ X \setminus A = K \end{cases}$$

если известно, что $B \subseteq A$, $A \cap X = \varnothing$.

6. Каждое из следующих утверждений либо доказать, либо показать при помощи диаграмм Эйлера - Венна, что оно не всегда верно:

1) $(A \cup B) \cap K = A \cup (B \cap K)$;
2) $(A \setminus B) \cup B = A$; $(A \cup B) \setminus B = A$;
3) $(A \cap B) \setminus A = \varnothing$;
4) $(A \setminus B) \cup K = (A \cup K) \setminus (B \cup K)$;
5) $\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right) \subseteq B$;
6) $B = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right) \Rightarrow A = \varnothing$.

7. Верно ли, что:

1) $A \cup B = A \cup K \Rightarrow B = K$;
2) $A \cap B = A \cap K \Rightarrow B = K$;
3) $A \cup B = A \cup K$ и $A \cap B = A \cap K \Rightarrow B = K$.

8. Доказать:

1) $(A \cup B) \cap K = A \cup (B \cap K) \Leftrightarrow A \subseteq K$;
2) $A = B \Leftrightarrow A \oplus B = \varnothing$;
3) $A \cup B = \varnothing \Leftrightarrow A = B = \varnothing$;
4) $(A \cup B) \setminus B = A \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$;
5) $A \setminus B = A \Leftrightarrow B \setminus A = B$;
6) $A \cup B = A \setminus B \Leftrightarrow B = \varnothing$;
7) $A \setminus B = A \cap B \Leftrightarrow B = \varnothing$;
8) $A \cup B \subseteq K \Leftrightarrow (A \subseteq K) \wedge (B \subseteq K)$;
9) $A \subseteq B \cup K \Leftrightarrow A \setminus B \subseteq K$;
10) $K \subseteq A \cap B \Leftrightarrow (K \subseteq A) \wedge (K \subseteq B)$;
11) $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$;

12) $A \subseteq B \subseteq K \Leftrightarrow A \cup B = B \cap K$;
13) $A \subseteq B \Rightarrow A \backslash K \subseteq B \backslash K$;
14) $(B \subseteq A) \wedge (K = A \backslash B) \Rightarrow A = B \cup K$;
15) $A \cup B = A \Rightarrow A \cap B = B$.

Объединением семейства множеств $A_i, i \in I$ называется множество $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = \{x : \exists j \in I : x \in A_j\}$.

Пересечением семейства множеств $A_i, i \in I$ называется множество $\bigcap\limits_{i \in I} A_i = \{x : \forall j \in I : x \in A_j\}$.

9. Найти $\bigcup\limits_{n \in N_i} \{-n, n\}$.

10. Пусть $X_\alpha = \{x \in R : x > \alpha_j\}$. Найти $\bigcup\limits_{n \in N} X_n$, $\bigcap\limits_{n \in N} X_n$.

11. Привести пример:

a) последовательности непустых множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, такой, что $X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_n$ и $\bigcap\limits_{n \in N} X_n = \varnothing$;

b) последовательности множеств, отличных от универсального множества U, такой, что $X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_n$ и $\bigcup\limits_{n \in N} X_n = U$;

c) семейства множеств такого, что пересечение любого конечного числа множеств из этого семейства не пусто, а пересечение всех множеств пусто.

12. Множества. Составить программу нахождения $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $A \oplus B$.

13. Составить программу проверки на равенство двух выражении алгебры множеств.

МЕТОД ВКЛЮЧЕНИЙ - ИСКЛЮЧЕНИЙ

3.1. Объединение конфигураций

Часто комбинаторная конфигурация является объединением других, число комбинаций в которых вычислить проще.

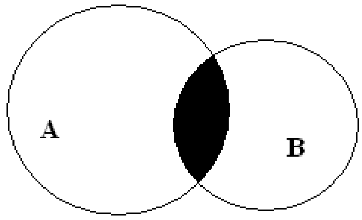


Рис.3.1.Диаграмма для правила сложения.

В простых случаях нетрудно получить формулы. Пусть даны множества A, B и их мощности $|A|, |B|$. Из рис.3.1 следует

$$|A| = |A \cap B| + |A \setminus (A \cap B)|; \qquad (3.1)$$

$$|B| = |A \cap B| + |B \setminus (A \cap B)|; \qquad (3.2)$$

$$|A \cup B| = |A \setminus (A \cap B)| + |B \setminus (A \cap B)| + |A \cap B|. \qquad (3.3)$$

Из тождеств (3.1), (3.2) и (3.3) следует, что верно равенство

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \qquad (3.4)$$

Формула (3.4) называется объединением конфигураций или правилом суммы. Правило суммы (3.4) позволяет вычислить мощность объединения двух множеств, если известны мощность каждого из множеств и мощности всех пересечений. Аналогично для трех множеств получим:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| \qquad (3.5)$$

Пример 3.1. Сколько существует натуральных чисел, меньших 1000, которые не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 7?

Решение. Сначала найдем число всех чисел, которые делятся на 3, на 5 и на 7 . Всего чисел, меньших 1000, равно 999, из которых:

$[999:3] = 333$ - число всех чисел, которые делятся на 3;

$[999:5] = 199$ - число всех чисел, которые делятся на 5;

$[999:7] = 142$ - число всех чисел, которые делятся на 7;

$[999:(3 \cdot 5)] = 66$ - число всех чисел, которые делятся на 3и 5;

$[999:(3\cdot 7)] = 47$ - число всех чисел, которые делятся на 3и на 7;
$[999:(5\cdot 7)] = 28$ - число всех чисел, которые делятся на 5 и на 7;
$[999:(3\cdot 5\cdot 7)] = 9$ - число всех чисел, которые делятся на 3, на 5 и на 7. на основании правила (3.5) получим число всех чисел, которые делятся на 3, 5 и на 7:333+199+142-66-47-28+9=542. Теперь найдем число всех чисел, которые не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 7: 999-542=457.

3.2. Классическая формула метода включений-исключений

Если заданы произвольные множества $X_1, X_2, ..., X_n$, то, полагая $X = X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_{n-1}$, $Y = X_n$ из (3.4) получим

$$|X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_{n-1} \cup X_n| = |X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_{n-1}| + |X_n| - |(X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_{n-1}) \cap X_n|. \quad (3.6)$$

Используя равенство (3.6), докажем общую формулу:

$$|X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_{n-1} \cup X_n| = \sum_{i=1}^{n} |X_i| - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} |X_{i_1} \cap X_{i_2}| + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n} |X_{i_1} \cap X_{i_2} \cap X_{i_3}| + ...$$
$$... + (-1)^{n-1} \sum_{1 \le i_1 < ... < i_k \le n} |X_{i_1} \cap X_{i_2} \cap ... \cap X_{i_k}| + ... + (-1)^{n-1} |X_1 \cap X_2 \cap ... \cap X_{n-1} \cap X_n|. \quad (3.7)$$

Формула (3.7) является классической формулой метода включения- исключения. Докажем ее индукцией по n. При $n = 2$ формула (3.7) совпадает с формулой (3.4), если положить $A = X_1, B = X_2$. Предположим, что (3.7) верна для (n-1) множеств:

$$|X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_{n-1}| = \sum_{i=1}^{n-1} |X_i| - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n-1} |X_{i_1} \cap X_{i_2}| + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n-1} |X_{i_1} \cap X_{i_2} \cap X_{i_3}| + ...$$
$$... + (-1)^{n-2} \sum_{1 \le i_1 < ... < i_k \le n-1} |X_{i_1} \cap X_{i_2} \cap ... \cap X_{i_k}| + ... + (-1)^{n-2} |X_1 \cap X_2 \cap ... \cap X_{n-2} \cap X_{n-1}| \quad (3.8)$$

Тогда с учетом предположения (3.8) можно продолжить:

$$|X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_{n-1}| = \sum_{i=1}^{n-1} |X_i| - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n-1} |X_{i_1} \cap X_{i_2}| + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n-1} |X_{i_1} \cap X_{i_2} \cap X_{i_3}| + ...$$
$$... + (-1)^{n-2} \sum_{1 \le i_1 < ... < i_k \le n-1} |X_{i_1} \cap X_{i_2} \cap ... \cap X_{i_k}| + ... + (-1)^{n-2} |X_1 \cap X_2 \cap ... \cap X_{n-2} \cap X_{n-1}|. \quad (3.9)$$

Аналогично получим

$$|(X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_{n-1}) \cap X_n| = |(X_1 \cap X_n) \cup (X_2 \cap X_n) \cup ... \cup (X_{n-1} \cap X_n)| =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} |X_i \cap X_n| - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n-1} |X_{i_1} \cap X_{i_2} \cap X_n| + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n-1} |X_{i_1} \cap X_{i_2} \cap X_{i_3} \cap X_n| + ...$$

$$\ldots+(-1)^{n-2}\sum_{1\le i_1<\ldots<i_{k-1}\le n-1}\left|X_{i_1}\cap\ldots\cap X_{i_{k-1}}\cap X_n\right|+\ldots+(-1)^{n-2}\left|X_1\cap X_2\cap\ldots\cap X_{n-1}\cap X_n\right|. \quad (3.10)$$

Вычитая из (3.9) равенство (3.10), принимая во внимание (3.6) и равенство

$$\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n-1}\left|X_{i_1}\cap\ldots\cap X_{i_k}\right|+\sum_{1\le i_1<\ldots<i_{k-1}\le n-1}\left|X_{i_1}\cap\ldots\cap X_{i_{k-1}}\cap X_n\right|=\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n}\left|X_{i_1}\cap\ldots\cap X_{i_k}\right|$$

получим, что формула (3.7) справедлива для следующего числа n. Следовательно, она справедлива для любого целого положительного числа n.

Пример 3. 2. Из 100 студентов 28 изучают английский язык, 30 – немецкий язык, 42 – французский язык, 8 – английский и немецкий язык, 10 – английский и французский язык, 5 – немецкий и французский язык и 3 студента – все 3 языка. Сколько человек не изучают ни одного языка? Сколько изучают только французский язык?

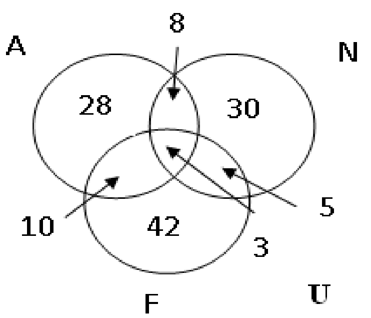


Рис.3.2.Диаграмма Эйлера для решения примера 3.2.

Решение. Пусть U – множество студентов. По условию мощность множества |U|=100 (рис.3.2). Пусть A – множество студентов, изучающих английский язык, N – множество студентов, изучающих немецкий язык, F – множество студентов, изучающих французский язык. По условию |A| = 28, |N| = 30, |F| = 42, $|A\cap N|$ = 8, $|A\cap F|$ = 10, $|N\cap F|$ = 5, $|A\cap N\cap F|$ = 3.

Необходимо найти множество студентов, не изучающих ни одного языка, т.е. $|U\backslash(A\cup N\cup F)| = |U| - (|A| + |N| + |F|) + |A\cap N| + |A\cap F| + |N\cap F| - |A\cap N\cap F| = 20$ и множество студентов, изучающих только французский язык $|F\backslash(A\cup N)| = |F| - (|A\cap F| + |N\cap F|) - |A\cap N\cap F| = 30$.

Пусть имеется *N* предметов и *n* свойств $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Каждый из рассматриваемых предметов может обладать одним или несколькими из этих n свойств. Обозначим через $N(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{is})$ число предметов, обладающих свойствами $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{is}$ (и, быть может, некоторыми другими), а через $N(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ - число предметов, не обладающих свойствами $a_{i1}\ a_{i2}, \ldots, a_{is}$. Например, $N(a_1, a_3, \bar{a}_4)$ - число предметов, обладающих свойствами a_1, a_3, но не обладающих свойством a_4. Справедлива формула

$$N(\bar{a}_1, \bar{a}_3, \ldots, \bar{a}_n) = N - N(a_1) - N(a_2) - \ldots - N(a_n) + N(a_1, a_2) +$$
$$+ N(a_1\ \ a_3) + \ldots + N(a_1, a_n) + \ldots + N(a_{n-1}, a_n) - N(a_1, a_2, a_3) - \ldots - -$$
$$N(a_{n-2}, a_{n-j}, a_n) + \ldots + (-1)^n N(a_1, a_2, \ldots, a_n). \qquad (3.11)$$

Формула (3.11) также называется *формулой включений и исключений.* Здесь слагаемые включают все комбинации свойств $a_1, a_2, \ldots, a_n$ без учёта их порядка; знак «+» ставится, если число учитываемых свойств чётно, и знак « - », если это число нечётно.

Пример 3.3. В результате опроса 70 студентов выяснилось, что 45 из них занимаются спортом, 29 - музыкой, 9 - и спортом, и музыкой. Сколько студентов из числа опрошенных не занимаются ни спортом, ни музыкой.

Решение. Чтобы применить формулу (3.11), обозначим через $a_1(a_2)$ - свойство студента, состоящее в том, что он занимается спортом (музыкой). Тогда имеем $N = 70$, $N(a_1) = 45$, $N(a_2) = 29$, $N(a_1,a_2) = 9$. Нужно найти число $N(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$. По формуле (3.11) получаем

$$N(\bar{a}_1, \bar{a}_2) = N - N(a_1) - N(a_2) + N(a_1,a_2) = 70 - 45 - 29 + 9 = 5.$$

Предположим теперь, что число $N(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ зависит не от самых этих свойств, а лишь от их числа.
Введём следующие обозначения : $N^{(0)} = N$, $N^{(1)} = N(a_1) = \ldots = N(a_n)$, $N^{(2)} = N(a_1, a_2) = \ldots = N(a_{n-i}, a_n), \ldots$, $N^{(k)} = N(a_1, \ldots, a_k) = \ldots = N(a_{n-k+1}, \ldots, a_n)$, $N^{(n)} = N(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $N = N(a_1,a_2,\ldots,a_n)$.

Тогда формула (3.11) примет вид:

$$\bar{N} = N^{(0)} - C_n^1 N^{(1)} - \ldots + (-1)^n C_n^n N^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k N^{(k)}. \quad (3.12)$$

Очевидно, формула (3.12) есть частный случай формулы (3.7).

Пример 3.4. Пусть имеется *n* карточек, пронумерованных от 1 до *n*. Сколькими способами можно расположить их в ряд так, чтобы ни для какого i $(1 < i < n)$ карточка с номером i не занимала бы i-го места?

Решение. Число всевозможных расположений (перестановок) n карточек в ряд равно $P_n = n! = N^{(0)}$. Обозначим через a_i свойство: «i-я карточка занимает место с номером i $(i = 1, 2, \ldots, n)$». Тогда $N(a_i) = N^{(i)} = P_{n-1} = (n - 1)!$ - число перестановок всех карточек в ряду, кроме i-й, которая остаётся на i-м месте;
$N(a_i, a_j) = N^{(2)} = P_{n-2} = (n - 2)!$ - число перестановок всех карто-

чек в ряду, кроме двух карточек с номерами i и j, остающихся на месте, т. е. на i-м и j-м местах, и т. д. $N(a_{i1}, a_{i2}, \ldots , a_{ik}) = N^{(k)} = P_{n-k} = (n - k)!$ - число расположений, при которых карточка с номером i_s занимает «своё» место i_s ($s = \overline{1, k}$). По формуле (3.12) получаем, что искомое число N равно

$$\overline{N} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k P_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{n!(n-k)!}{k!(n-k)!} = n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{1}{k!}. \quad (3.13)$$

Таким образом, число способов занимать любой i-й карточки не i-е место согласуется с формулой (3.13) числа беспорядков.

Задачи и упражнения

1. При обследовании читательских вкусов студентов оказалось, что 60 % студентов читает журнал A, 50 % - журнал B, 50 % - журнал C, 30 % - журналы A и B, 20 % - журналы B и C, 40 % - журналы A и C, 10 % - журналы A, B и C. Какой процент студентов: а) не читает ни одногоиз этих журналов? б) читает в точности два журнала? в) читает только один журнал B? Задачу решить двумя способами (с помощью формулы (3.7) и кругов Эйлера).
2. При опросе 13 человек, каждый из которых знает по крайней мере один иностранный язык, выяснилось, что 10 человек знают английский язык, 7 - немецкий, 6 - испанский, 5 - английский и немецкий, 4 - английский и испанский, 3 - немецкий и испанский. Сколько человек знают: а) все три языка? б) ровно два языка? в) только английский язык?
3. На экскурсию поехало 92 человека. Хычины с мясом взяли 47, с сыром - 38; с зеленью - 42 человек; и с сыром, и с мясом- 28; и с мясом, и с зеленью - 31; и с сыром, и с зеленью - 26 человек. Все три вида хычина взяли 25 человек. Несколько человек вместо хычинов взяли пирожки. Сколько человек взяли с собой пирожки?
4. Найти количество натуральных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся ни на одно из чисел 3, 5 и 7?
5. Найти количество натуральных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся ни на одно из чисел 6, 15 и 10?
6. Показать, что если $n = 30m$, то число чисел, не превосходящих n и не делящихся ни на одно из чисел 6, 10 и 15, равно $22m$.
7. Сколько неотрицательных целых чисел, меньших миллиона, состоит только из цифр 1, 2, 3, 4?
9. Существует ли множество всех множеств?
10. Доказать, что $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
11. Доказать, что

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

4. ОТНОШЕНИЯ

*4.1. **Прямое произведение множеств***

Пусть элементы $a\in A, b\in B$, тогда пару (a,b) назовем упорядоченной. Элементы $a\in A, b\in B$ называются компонентами пары (a,b). Две упорядоченные пары (a,b) *и* (c,d) равны $(a,b)=(c,d)$, если равны ее соответствующие компоненты т.е. $(a=b)$ *и* $(c=d)$. Упорядоченную пару можно рассматривать как множество, если ее определить так: $(a,b):=\{a,(a,b)\}$.

Декартовым или прямым произведением двух непустых множеств A и B называется множество упорядоченных пар $\grave{A}\times\hat{A}:=\{(a,b)/\, a\in A, b\in B\}$.

Данное определение можно обобщить и на случай *n* множеств.

Если $A_1, A_2, ..., A_n$ - множества, то их прямое произведение $A_1\times A_2\times ...,\times A_n$ представляет собой множество

$$A_1\times A_2\times ...,\times A_n := \{(a_1,a_2,...,a_n)\setminus a_i\in A_i, i=1,2,...,n\},$$

состоящее из всевозможных упорядоченных наборов $(a_1,a_2,...,a_n): a_i\in A_i,\ i=1,2,...,n$ из элементов этих множеств.

Если $A_1=A_2=...=A_n$, то прямое произведение $A^n = A\times A\times ...\times A$ называется степенью *и* обозначается A^n. Соответственно $A^1 = A$, $A^2 = A\times A,\ldots$, $A^n = A\times A^{n-1}$. Так, например, множество упорядоченных векторов *n* вещественных чисел обозначается R^n.

Теорема 4.1. $|\grave{A}\times\hat{A}|=|\grave{A}||\hat{A}|$.

Доказательство. Поскольку первый компонент упорядоченной пары можно выбрать $|\grave{A}|$ способами, а второй - $|\hat{A}|$ способами. Таким образом, всего имеется $|\grave{A}||\hat{A}|$ упорядоченных пар. Теорема 4.1 доказана.

Следствие 4.1. $|\grave{A}^n|=|\grave{A}|^n$.

*4.2. **Бинарные отношения***

Пусть A,B - два множества. (Бинарным) отношением R из множества A в множество B называется любое подмножество прямого произведения A и $B: R\subset A\times B$. Для бинарных отношений обычно используется инфиксная форма записи: $aRb := \{(a,b) \in R \subset A \times B\}$. Если $A = B$, то бинарное отношение есть отношение на множестве A.

Пример 4.1. Пусть задан универсум U. Тогда $\in$(принадлежность)- отношение из множества U в множество 2^U, а $\subset$(включение) и $=$ (равенство) - отношения на 2^U. Известно, что отношения $\le, =, \ge, \ne, <, >$ определены на множестве R действительных чисел.

Для задания бинарного отношения R используют те же методы, что и для произвольных множеств, кроме того, бинарное отношение, заданное на конечном множестве A, можно задать в виде графа, а бинарное отношение на множестве R можно задать в виде декартовой диаграммы.

Графом бинарного отношения называется диаграмма, в которой элементы множества A изображаются точками на плоскости, а пары элементов $a,b \in A$, для которых выполняется условие $(a,b) \in R$, соединяются стрелкой, направленной от a к b, причем пара $(a,a) \in R$ изображаются петлей в точке a. Под декартовой диаграммой понимают изображение пар $(a,b) \in R$ в декартовой прямоугольной системе координат.

Областью определения бинарного отношения R называется множество $X_R := \{x \in X : \exists y : (x,y) \in R\}$.

Областью значений бинарного отношения R называется множество $Y_R := \{y \in Y : \exists x : (x,y) \in R\}$.

Пусть R - отношение на $A : R \subset A \times A,\ (a,b) \in A$.

Введем определения:

$R^{-1} := \{(a,b) / (b,a) \in R\}$; $\overline{R} := \{(a,b) / (b,a) \notin R\}$;

$I := \{(a,a) / a \notin A\}$; $U := \{(a,b) / (a \in A) \wedge (b \in A)\}$,

где R^{-1} - обратное отношение; $\overline{R}$ - дополнение отношения; I - тождественное отношение; U - универсальное отношение.

Множество упорядоченных наборов (кортежей) $R \subset A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n := \{(a_1, a_2, ..., a_n) / (a_i \in A_i), i = 1,2,...,n\}$ называется n-местным (n-арным) отношением. В дальнейшем будем рассматривать только бинарные отношения при этом слово ”бинарные ” будем опускать.

4.3. Композиция отношений. Степень и ядро отношения

Пусть $R_1 \subset A \times C$ - отношение из A в C, а $R_2 \subset C \times B$ - отношение из C в B $A{:}R \subset A \times A, (a,b) \in A$.

Композицией двух отношений R_1 и R_2 называется отношение $R \subset A \times B$ из A в B такое, что $R = R_1 \circ R_2 := \{(a,b)/(a \in A) \wedge (b \in B) \wedge \ \exists c \in C / aR_1 c \wedge cR_2 b\}$. Композиция отношений на множестве A - отношение на множестве A.

Пусть R - отношение на A. Степенью n отношения R на множестве A называется его композиция с самим собой n раз и обозначается: $R^n = \underbrace{R \circ R \circ ... \circ R}_{n - ðàç}$. Соответственно

$R^0 = I$, $R^1 = R$, $R^2 = R \circ R$, $\ldots$, $R^n = R^{n-1} \circ R$.

Теорема 4.2. Если некоторая пара (a,b) принадлежит какой-либо степени отношения R на множестве A мощности n, то эта пара принадлежит и степени R не выше $n-1$:

$$\left(R \subset A^2\right) \wedge (|A| = n) \Rightarrow (\forall a,b \in A)\left(\exists k{:}aR^k b\right) \Rightarrow \left(\exists k < n{:}aR^k b\right).$$

Доказательство. Доказательство основывается на корректности следующего алгоритма:

While $k \geq n$ do

$c_0 := a; c_k ;= b$

$(a,b) \in R^k \Rightarrow \exists c_1, c_2, ..., c_{k-1} \in A c_0 R c_1 R c_2 R ... R c_{k-1} R c_k$

$|A| = n \Rightarrow \exists i, j : c_i = c_j \Rightarrow c_0 R c_1 R c_2 R ... R c_{j-1} R c_{j+1} R ... R c_{k-1} R c_k \Rightarrow$

$\Rightarrow (a,b) \in R^{k - (j-i)}$

$k ;= k - (j - i)$

end while .

Следствие 4.3. Если R - отношение на множестве A мощности n, то справедливо утверждение:

$$\left(R \subset A^2\right) \wedge (|A| = n) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = \bigcup_{i=1}^{n-1} R^i.$$

Ядром отношения $R \subset A \times B$ называется отношение $R \circ R^{-1}$.

Ядро 2^M отношения R из A в B является отношением на множестве A.

Пример 4.2. Для заданного множества M мощности n рассмотрим отношение P из булеана 2^M в множество целых чисел $0..n=\{0,1,...,n\}, P\subset 2^M \times 0..n$, где $P:=\{(X,k)/\ X\subset M \wedge k\in 0..n \wedge |X|=k\}$. Тогда ядро отношения - отношение равномощности.

4.4. Свойства отношений

Пусть $R\subset A^2$ - отношение на A. Отношение R на множестве A называется рефлексивным, если для любого $a\in A$ пара $(a,a)\in A$ $(\forall a\in A{:}aRa)$. Если A - конечное множество, то рефлексивность отношения R означает, что на графе данного отношения в точке $a\in A$ есть петля. Если $A = R$, то рефлексивность отношения R с точки зрения декартовой диаграммы означает, что в число изображенных точек войдут все точки прямой $y(a)=a$. Отношение R на множестве A называется антирефлексивным, если для любого $a\in A$ пара $(\neg a,a)\in A$ $(\forall a\in A{:}\neg aRa)$.

Отношение R на множестве A называется симметричным, если для любых $a,b\in A$ из того, что пара $(a,b)\in R$ следует , что пара $(b,a)\in R$ $(\forall a,b\in A{:}bRa)$. Если A - конечное множество, то симметричность отношения R означает, что на графе данного отношения все присутствующие стрелки двусторонние. Если A=R, то симметричность отношения R с точки зрения декартовой диаграммы означает, что изображенное множество симметрично относительно прямой $y(a)=a$.

Отношение R на множестве A называется антисимметричным, если для любых $a,b\in A$ из принадлежности пар $(a,b)\in R$ и $(b,a)\in R$ отношению R следует $a=b$ $(\forall a,b\in A){:}(aRb\wedge bRa)\Rightarrow a=b$. Если A- конечное множество, то антисимметричность отношения R означает, что на графе данного отношения все стрелки односторонние.

Отношение R на множестве A называется транзитивным, если для любых $a,b,c\in A$ из принадлежности пар $(a,b)\in R$, $(b,c)\in R$ отношению R следует принадлежность этому отношению также пары $(a,c)\in R$ $(\forall a,b,c\in A{:}(aRb)\wedge(bRc)\Rightarrow aRc)$. Отношение R на множестве A называется полным или линейным, если для любых $a,b\in A$ из $a\neq b$ следует $(a,b)\in R$ или $(b,a)\in R$ $((\forall a,b\in A)\wedge(a\neq b)\Rightarrow(aRb\vee bRa))$.

Пример 4.3. Для любых бинарных отношений выполняются следующие свойства:

1) $\left(R^{-1}\right)^{-1}=R$; 2) $(R_2\circ R_1)^{-1}=R_1^{-1}\circ R_2^{-1}$

Теорема 4.3. Пусть $R\subset A^2$ - отношение на A. Тогда:

1) R - рефлексивно $\Leftrightarrow I\subset R$;
2) R - симметрично $\Leftrightarrow R=R^{-1}$;
3) R - транзитивно $\Leftrightarrow R\circ R\subset R$;
4) R - антисимметрично $\Leftrightarrow R\cap R^{-1}\subset I$;
5) R - антирефлексивно $\Leftrightarrow R\cap I=\varnothing$;
6) R - полно $\Leftrightarrow R\cup I\cup R^{-1}=U$.

Доказательство. Используя определения свойств отношений, имеем:

1. $\Rightarrow: (\forall a\in A: aRa)\Rightarrow(\forall a\in A:(a,a)\in R)\Rightarrow I\subset R$.

1. $\Leftarrow: I\subset R\Rightarrow(\forall a\in A:(a,a)\in R)\Rightarrow(\forall a\in A: aRa)$

2. $\Rightarrow: (\forall a,b\in A: aRb\Rightarrow bRa)\Rightarrow(\forall a,b\in A:(a,b)\in R\Rightarrow(b,a)\in R)\Rightarrow$
$\Rightarrow: ((a,b)\in R\Rightarrow(a,b)\in R^{-1})\wedge((a,b)\in R^{-1}\Rightarrow(a,b)\in R)\Rightarrow(R\subset R^{-1})\wedge$
$\wedge(R\supset R^{-1})\Rightarrow R=R^{-1}$

2. $\Leftarrow: R=R^{-1}\Rightarrow\left(R\subset R^{-1}\right)\wedge\left(R\supset R^{-1}\right)\left((a,b)\in R\Rightarrow(a,b)\in R^{-1}\right)\wedge$
$\left((a,b)\in R^{-1}\Rightarrow(a,b)\in R\right)\Rightarrow(\forall a,b\in A:(a,b)\in R\Rightarrow(b,a)\in R)\Rightarrow$
$:\Rightarrow(\forall a,b\in A: aRb\Rightarrow bRa)$.

3. $\Rightarrow: (\forall a,b,c\in A:(aRb)\wedge(bRc)\Rightarrow aRc)aR\circ Rb=\exists c\in A:(aRc)\wedge(cRb)$
$\Rightarrow aRb\Rightarrow R\circ R\subset R$.

3. $\Leftarrow R\circ R\subset R\Rightarrow(\forall a,b\in A:(a,b)\in R\circ R\Rightarrow aRc)\Rightarrow$
$(a,b)\in R:(aRc)\wedge(cRb)\Rightarrow aRb$

4. $\Rightarrow:$ От противного.

$\Leftarrow: R\cap R^{-1}\subset I\Rightarrow(aRb)\wedge\left(aR^{-1}b\Rightarrow a=b\right)\Rightarrow(aRb)\wedge(bRa)\Rightarrow a=b$

4. $\Leftarrow: R\cap R^{-1}\subset I\Rightarrow(aRb)\wedge\left(aR^{-1}b\Rightarrow a=b\right)\Rightarrow$
$\Rightarrow(aRb)\wedge(bRa)\Rightarrow a=b$.

5. $\Rightarrow:$ От противного.

$R \cap I = \varnothing$

$\Rightarrow \exists a \notin A(aRa) \wedge (aIa) \Rightarrow \exists a \in A(aRa) \wedge (bRa) = \neg \forall a \in A(-aRa).$

5. $\Leftarrow: R \cap I = \varnothing \Rightarrow \neg \exists a \in A(aRa) \Rightarrow \exists a \in A(aRa) \Rightarrow \forall a \in A(\neg aRa).$

6. $\Rightarrow: (\forall a, b \in A: a \neq b \Rightarrow aRb \vee bRa) \Rightarrow \left(a \neq b \Rightarrow (a,b) \in R \cup R^{-1} \right),$

$(a = b \Rightarrow a, b \in I) \Rightarrow \Rightarrow \left(\forall a, b \in A: (a,b) \in R \cup I \bigcup R^{-1} \right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow U \subset R \cup I \bigcup R^{-1} \Rightarrow U = R \cup I \bigcup R^{-1}.$$

6. $\Leftarrow: R \cup I \bigcup R^{-1} = U \Rightarrow (a = b \Rightarrow a, b \in I) \vee a \neq b \Rightarrow$

$\Rightarrow aRb \vee \left((a,b) \in R \cup R^{-1} \right) \Rightarrow \Rightarrow (a = b \wedge (a,b) \in I \vee a \neq b \Rightarrow aRb \vee bRa) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(a \neq b \Rightarrow (a,b) \in R \vee (a,b) \in R^{-1} \right) \Rightarrow \Rightarrow a \neq b \Rightarrow (aRb \vee bRa).$ Теорема 4.3 доказана.

4.5. Представление отношений в ЭВМ

Пусть $R \subset A^2$ и $|A| = n$. Перенумеруем элементы множества A. Тогда отношение R представляется матрицей $R[i,j] = \|R[i,j]\|_{n \times n}$ $(R: array\ [1..n, 1..n]\ of\ 0..1)$, где элемент

$$R_{ij} = \begin{cases} 1, & если\ (iRj) \\ 0, & если\ (i\overline{R}j) \end{cases}.$$

Теорема 4.4. $R_1 \circ R_2 = R_1 \times R_2$, где

$$R_1 \times R_2 = \bigvee_{k=1}^{n} R_1[i,k] \wedge R_2[k,j].$$

Доказательство. Пусть $(a,b) \in R_1 \circ R_2$. Тогда

$(\exists c \in A: (aR_1c) \wedge (cR_2b) \Rightarrow R_1[a,c] = 1 \wedge R_2[c,b] = 1 \Rightarrow R_1[a,c] \wedge R_2[c,b] = 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\bigvee_{k=1}^{n} R_1[i,k] \wedge R_2[k,j] \right) = 1.$ Отсюда следует, что

$(R_1 \times R_2)[a,b] = 1 \Rightarrow (a,b) \in R_1 \circ R_2.$ Пусть теперь $(a,b) \notin R_1 \circ R_2$. Тогда

$\neg(\exists c \in A: (aR_1c) \wedge (cR_2b) \Rightarrow \forall c \in A \neg(aR_1c) \wedge (cR_2b) \Rightarrow \forall c \in A \neg(aR_1c) \vee \neg(cR_2b)) \Rightarrow$

$\forall c \in A(R_1[a,c] = 0) \vee (R_2[c,b] = 0) \Rightarrow \forall c \in A(R_1[a,c]) \wedge (R_2[c,b]) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow\left(\bigvee_{k=1}^{n} R_1[i,k]\wedge R_2[k,j]\right)=0$. Отсюда следует, что

$(R_1\times R_2)[a,b]=0\Rightarrow(a,b)\notin R_1\circ R_2$. Теорема 4.4 доказана.

Следствие 4.4. $R^k[i,j]=(R[i,j])^k$.

Теорема 4.5. $R_1\cup R_2=R_1\times R_2$, где $(R_1\vee R_2)[i,j]=R_1[i,j]\wedge R_2[i,j]$.

Доказательство. Пусть $(a,b)\in R_1\cup R_2$. Тогда

$(\neg(aR_1b)\wedge\neg(aR_2b)\Rightarrow R_1[a,b]=0\vee R_2[a,b]=0\Rightarrow(R_1\vee R_2)[a,b]=0)\Rightarrow$

$\Rightarrow((R_1\vee R_2)[a,b]=0)\Rightarrow(a,b)\notin(R_1\vee R_2)$. Теорема 4.5 доказана.

Пример 4.4. Перечислить элементы $(A\times B)$, $(B\times A)$:

1) *A = {1,2}, B = {3,4,5};*

2) *A= Ø, B = {1,2,3,4}.*

Решение. По определению $(A\times B):=\{(a,b)/(a\in A)\wedge(b\in B)\}$. Порядок построения данного множества будет следующий: вначале перечислим все пары, первый элемент которых равен первому элементу множества A , а второй элемент берется из множества B в том порядке, в котором они записаны в множестве B , затем аналогично берем второй элемент из A и составляем пары со всеми элементами из B и т.д.

Аналогичен и метод построения множества $(B\times A):=\{(a,b)/(b\in B)\wedge(a\in A)\}$.Поскольку множество A пусто, то $A\times B=B\times A=\varnothing$, и оно не содержит ни одной пары.

Пример 4.5. Пусть $A=\{3,4\}$. Перечислить элементы множества A^4 . *Решение.* По определению

$A^4:=\{(a_1,a_2,a_3,a_4)/(a_1\in A)\wedge(a_2\in A)\wedge(a_3\in A)\wedge(a_4\in A)\}$,

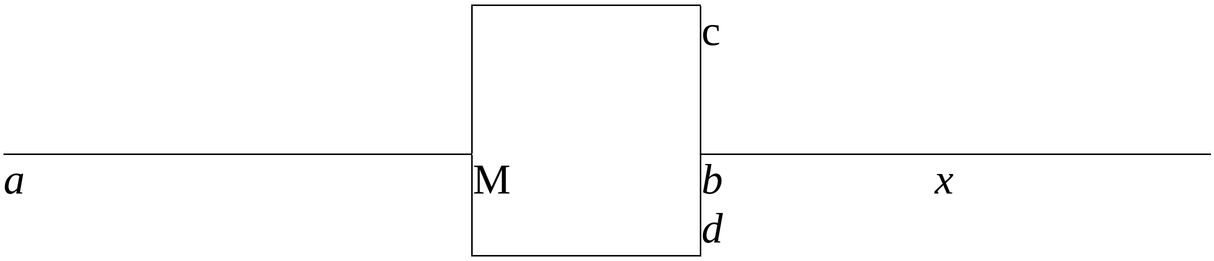
$$A^4=\left(\begin{array}{c}(3,3,3,3),(3,3,3,4),(3,3,4,3),(3,3,4,4),\\(3,4,3,3),(3,4,3,4),(3,4,4,3),(3,4,4,4),\\(4,3,3,3),(4,3,3,4),(4,3,4,3),(4,3,4,4),\\(4,4,3,3),(4,4,3,4),(4,4,4,3),(4,4,4,4)\end{array}\right)$$

Пример 4.6. Пусть на плоскости задана декартова система координат. Изобразить на плоскости следующее множество:

$M=[a,b]\times[c,d]$,

где $a,b,c,d\in M:a<b,c<d$.

Решение. При построении прямого произведения $M = [a,b]\times[c,d]$ каждой точке $x \in [a,b]$ ставятся в соответствие пары (x,y): $y \in [c,d]$, поэтому в результате получим множество



Пример 4.7. Доказать следующее равенство: $(A\cap B)\times(K\cap M) = (A\times K)\cap(B\times M)$.

Решение. Равенство двух множеств доказывается с помощью двух включений, объединив их одной записью. Из определения прямого произведения следует, что элементами множеств в данном случае являются упорядоченные пары точек. Итак, пусть $(x,y)\in(A\cap B)\times(K\cap M) \Leftrightarrow x\in(A\cap K)\wedge y\in(B\cap M)\Leftrightarrow$ $(x\in A)\wedge(x\in B)\wedge(y\in B)\wedge(y\in M)\Leftrightarrow((x,y)\in(A\times K))\wedge((x,y)\in(B\times M))\Leftrightarrow$ $(x,y)\in(A\times K)\cap(B\times M)$.

Пример 4.8. Доказать, что для любых непустых множеств *A*, *B*, *K* из равенства $(A\times B)\cap(B\times A) = K\times K$ следует, что $A = B = K$.

Решение. Для доказательства данного утверждения установим два равенства $A = K$ и $B = K$. Для любых $x\in A, y\in B$ $(x,y)\in A\times B \Rightarrow (x,y)\in K\times K \Rightarrow (x\in K)\wedge(y\in K)\Rightarrow(A\subset K)\wedge(B\subset K)$.

С другой стороны, для произвольного $x\in K: (x,x)\in K\times K \Rightarrow ((x,x)\in A\times B)\vee((x,x)\in B\times A)\Rightarrow(x\in A)\wedge(x\in B)\Rightarrow$ $\Rightarrow(K\subset A)\wedge(K\subset B)$. Таким образом, имеет место равенство $A = B = K$.

Пример 4.9. На множестве *a* = {6,7,8,9, 11,12,13,14} задано бинарное отношение *R* = {(x, y): x *делится на* y} . Нарисовать граф данного бинарного отношения.

Решение. Расположим на плоскости точки множества A. Точки $x, y\in A$, для которых пара $(x,y)\in R$, соединим стрелкой, направленной от x к y. Пары $(x,x)\in R$ изобразим петлей вокруг точки x. Результатом такого построения будет граф (рис.4.1).

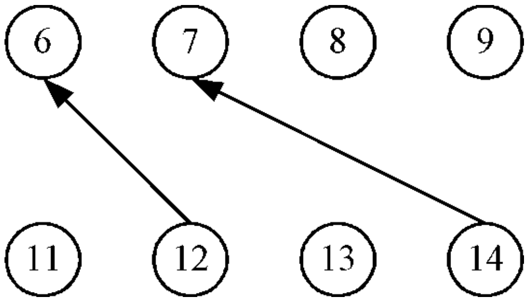
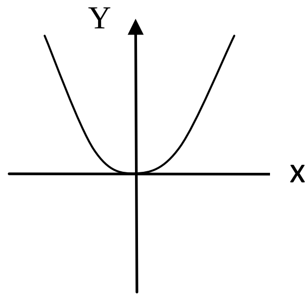


Рис.4.1. Граф бинарного отношения.

Пример 4.10. Для следующего бинарного отношения, определенного на множестве *R*, найти область определения, область значений и нарисовать декартову диаграмму
$R=(x,x): x^2=y$.

Решение. В соответствии с определением
$X_R=\{x\in R:\exists y(x,y)\in R\}=R, Y_R=\{y\in Y:\exists x:(x,y)\in R\}=R^+\cup\{0\}$. Декартова диаграмма для данного бинарного отношения имеет вид



Пример 4.11. Для каждого из следующих бинарных отношений выясните, какими свойствами (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) оно обладает и какими не обладает.

1) $R = \{(1,2), (2,1), (1,1), (1,3), (3,2), (3,3)\}$ на $X = \{1,2,3\}$;

2) $R=\{(x,y): x-y\in Z\}$ на множестве $X = R$;

3) $\{R=(x,y): 2x=3y\}$ на множестве $X = Z$;

4) $\{R=(X,Y): X\subset Y\}$ на множестве $X = P(Z)$.

Решение.

1) Данное отношение не является рефлексивным, поскольку для точки $2\in X$ пара $(2,2)\notin X$; не является симметричным, поскольку, например, пара $(1,3)\in R$ а пара $(3,1)\in R$; не является антисимметричным, поскольку, например, пары $(1,2),(2,1)\in R$, но

$1\neq 2$; не является транзитивным, поскольку, например $(3,2)\in R$, $(2,1)\in R$, а $(3,1)\notin R$.

2) Данное отношение является рефлексивным, поскольку для любой точки $x\in R$ разность $x-x=0\in Z$, т.е. $(x,x)\in R$; является симметричным, поскольку принадлежность любой пары $(x,y)\in R$ отношению R означает $x-y=k\in Z$, но тогда $y-x=-k\in Z$, т.е. пара $(y,x)\in R$; не является антисимметричным, поскольку, например, пары $(1,2),(3,2)\in R$ и $(1,2),(3,2)\in R$, но $(1,2)\neq(3,2)$; является транзитивным, поскольку для любых $x,y,z\in R$ принадлежность пар $(x,y),(y,x)$ отношению R означает $x-y=k\in Z$ и $y-x=n\in Z$, но тогда $x-z=k+n\in Z$, т.е. $(x,z)\in R$.

3) Данное отношение не является рефлексивным, поскольку из всех пар $(x,x)\in Z$ только пара $(x,x)\in R$, ведь для всех остальных $x\in Z$ не выполнено равенство $2x=3x$; не является симметричным, поскольку, например, пара $(3,2)\in R$ $(2\cdot 3=3\cdot 2)$, а пара $(2,3)\notin R$ $(2\cdot 2\neq 3\cdot 3)$; является антисимметричным, поскольку для любых пар $(y,x)\in R$, $(y,x)\in R$ одновременно выполняются равенства $2x=3y$ и $2y=3x$, т.е. $9x=4x$ и $4y=9y$, но это может быть только в том случае, если $x=y=0$; не является транзитивным, поскольку, например, пара $(9,6)\in R$ $(2\cdot 9=3\cdot 6)$, пара $(6,4)\in R$ $(2\cdot 6=3\cdot 4)$, но пара $(9,4)\notin R$ $(2\cdot 9\neq 3\cdot 4)$.

4) Данное отношение не является рефлексивным, поскольку для $\varnothing\in P(Z)$ пересечение $\phi\cap\phi=\phi$, т.е. $(0,0)\notin R$; является симметричным, поскольку принадлежность любой пары (x,y) отношению R означает $x\cap y\neq\phi$, но тогда $y\cap x\neq\phi$, т.е. пара $(y,x)\in R$; не является транзитивным, поскольку, например,
пара $(\{1,2\},\{2,3\})\in R$ $(\{1,2\}\cap\{2,3\}=\{2\}\neq\phi)$
и пара $(\{2,3\},\{3,6,7\})\in \mathrm{R}$ $(\{2,3\}\cap\{3,6,7\}=\{3\}\neq\phi)$,
но пара $(\{1,2\},\{3,6,7\})\in \mathrm{R}$, так как $\{1,2\}\cap\{3,6,7\}=\phi$

Пример 4.12. Пусть на множестве R заданы следующие бинарные отношения: $R_1=\{(x,y):x=y^2\}$; $R_2=\{(x,y):x+y\leq 2\}$; $R_3=\{(x,y):x+y\in Z\}$. Найти обратные к данным бинарным отношениям и всевозможные композиции этих бинарных отношений.

Решение. Вначале выпишем обратные отношения:

$R_1^{-1}=\{(x,y):(y,x)\in R_1\}=\left\{(x,y):y=x^2\right\}$;
$R_2^{-1}=\{(x,y):(y,x)\in R_2\}=\{(x,y):y+x\le 2\}=R_2$;
$R_3^{-1}=\{(x,y):(y,x)\in R_3\}=\{(x,y):y+x\in Z\}=R_3$. В качестве примера рассмотрим некоторые композиции рассматриваемых бинарных отношений:

$$R_1\circ R_2=\{(x,y):\exists z/(x,z)\in R_2,(z,y)\in R_1\}=\left\{(x,y):\exists z:x+z\le 2,z=y^2\right\}=$$
$$=\left\{(x,y):x+y^2\le 2\right\};$$
$$R_2\circ R_1=\{(x,y):\exists z/(x,z)\in R_1,(z,y)\in R_2\}=\left\{(x,y):\exists z:x=z^2,z+y\le 2,\right\}=$$
$$=\left\{(x,y):x\ge 0,\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}+y\le 2\\ -\sqrt{x}+y\le 2\end{array}\right.\right\}=\left\{(x,y):x\ge 0,-\sqrt{x}+y\le 2+y^2\le 2\right\};$$
$$R_2\circ R_3=\{(x,y):\exists z/(x,z)\in R_3,(z,y)\in R_2\}=\{(x,y):\exists z:x+z\in Z,z+y\le 2\}=$$
$$=\{(x,y):\exists z:x+z=k\in Z,z+y\le 2\}=\{(x,y):\exists k\in Z,k-x+y\le 2\}=R\times R;$$
$$R_3\circ R_2=\{(x,y):\exists z/(x,z)\in R_2,(z,y)\in R_2\}=\{(x,y):\exists z:x+z\le 2,x+y\in Z\}=R\times R.$$

Остальные решить самостоятельно.

Пример 4.13. Пусть X - произвольное множество, обозначим символом I_X отношение на множестве X вида
$I_X=\{(x,y):x=y\}=\{(x,x):x\in X\}$.

Доказать, что для любого бинарного отношения R между элементами множеств A и B выполняются равенства:
$I_B\circ R=R$, $\quad R\circ I_A=R$.

Решение. $I_B\circ R=\{(x,y)\in A\times B:\exists z\in B:(x,z)\in R,(z,y)\in I_B\}=$
$=\{(x,y)\in A\times B\exists z\in B:(x,z)\in R,x=y\}=R$;
$R\circ I_A=\{(x,y)\in A\times B:\exists z\in A:(x,z)\in I_A,(z,y)\in R,\}=$
$=\{(x,y)\in A\times B:\exists z\in Ax=z,(z,y)\in R\}=\{(x,y)\in A\times B:(z,y)\in R\}=R$.

Пример 4.14. Пусть φ,ϕ,χ бинарные отношения, определенные на множестве X. Доказать следующие утверждения:

1) если φ,ϕ - симметричные (антисимметричные) отношения, то $(\varphi\cap\phi)^{-1}$ - симметричное (антисимметричное) отношение;

2) $(\varphi\setminus\phi)\circ\chi\supseteq(\varphi\circ\chi)\setminus(\phi\circ\chi)$.

Решение.

1. Пусть φ, ϕ - симметричные отношения, докажем, что $(\varphi\cap\phi)^{-1}$ - симметричное отношение. Пусть

$$(x,y)\in(\varphi\cap\phi)^{-1}\Rightarrow(y,x)\in\varphi\cap\phi\Rightarrow\begin{cases}(y,x)\in\varphi\\(y,x)\in\phi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x,y)\in\varphi\\(x,y)\in\phi\end{cases}\Rightarrow(x,y)\in\varphi\cap\phi\Rightarrow(y,x)\in(\varphi\cap\phi)^{-1}$$

2. Пусть φ, ϕ - антисимметричные отношения, докажем, что $(\varphi\cap\phi)^{-1}$ - антисимметричное отношение. Пусть $(x,y)\in(\varphi\cap\phi)^{-1}$, тогда

$$\begin{cases}(x,y)\in(\varphi\cap\phi)^{-1}\\(y,x)\in(\varphi\cap\phi)^{-1}\end{cases}\Rightarrow(y,x)\in\varphi\cap\phi\Rightarrow\begin{cases}(y,x)\in\varphi\cap\phi\\(x,y)\in\varphi\cap\phi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x,y),(y,x)\in\varphi\\(x,y),(y,x)\in\phi\end{cases}\Rightarrow x=y.$$

3.Докажем включение $(\varphi\setminus\phi)\circ\chi\supseteq(\varphi\circ\chi)\setminus(\phi\circ\chi)$. Пусть

$$(x,y)\in(\varphi\setminus\phi)\circ\chi\Rightarrow\begin{cases}(x,y)\in\varphi\circ\chi\\(x,y)\notin\phi\circ\chi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\exists z:((x,z)\in\chi)\wedge((z,y)\in\varphi)\\\forall z:((x,z)\notin\chi)\wedge((z,y)\notin\phi)\end{cases}\Rightarrow\exists z:\begin{cases}(x,z)\in\chi\\(z,y)\in\varphi\Rightarrow\\(z,y)\notin\phi\end{cases}$$

$$\Rightarrow\exists z:\begin{cases}(x,z)\in\chi\\(z,y)\in\varphi\setminus\phi\end{cases}\Rightarrow(x,y)\in(\varphi\setminus\phi)\circ\chi.$$

Задачи и упражнения

1. Пусть $X = \{*, x\}$. Перечислить все элементы множеств X^3,X^4.
2. Найти геометрическую интерпретацию множества *A x B* , где *A* - множество точек отрезка *[0,1]*, а *B* - множество точек квадрата с вершинами в точках *(0,0), (0,l), (l,0), (l,l)*.
3. Доказать, что $(A\times B)\cup(K\times M)\subset(A\cup K)\times(B\cup M)$. При каких *A, B, K, M* включение можно заменить равенством.
4. Доказать, что для произвольных множеств *A, B, K* :
   1) $(A\cup B)\times(K\cup M)=(A\times K)\cup(B\times K)$;
   2) $(A\setminus B)\times K=(A\times K)\setminus(B\times K)$;
   3) $A\times(B\setminus K)=(A\times K)\setminus(A\times K)$.
5. Пусть $A\neq\phi, B\neq\phi$ и $(A\times B)\cup(B\times A)=K\times M$. Доказать, что в этом случае $A=B=K=M$. Перечислить все элементы бинарного отношения R и нарисовать его граф:
   1) $R = \{(x, y): x < y\}$ на множестве $X = \{1,2,3,4,5\}$;
   2) $R = \{(x, y): y = x + 1\}$ на множестве $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

6. Для каждого из следующих бинарных отношений, определенных на множестве R, найти область определения, область значений и нарисовать декартову диаграмму:
   1) $R=\{(x,y):x\le y\}$;
   2) $R=\{(x,y):x=y\}$;
   3) $R=\left\{(x,y):x^2+4y^2\le 1\right\}$;
   4) $R=\left\{(x,y):x^2=y^2\right\}$;
   5) $R=\{(x,y):x=\log_2 y\}$;
   6) $R=\{(x,y):y=\sin x\}$.

7. Даны бинарные отношения R между элементами множеств A и B , найти область определения и область значений для данных бинарных отношений:

1) *A= {1,2,3,4,5}, B = {{1},{1,2},{2,5},{3}},* $R=\{(x,y)\in A\times B:x\in y\}$;

2) $A=Z\times Z, B=Q$, $R=\left\{((a,b),c)\in A\times B:c=\dfrac{a}{b}\right\}$;

3) $A=Z\times Z, B=Q$, $R=\{(x,y)\in A\times B:x\cdot y=1\}$;

4) $A=Z\times Z, B=Q$, $R=\left\{(a,b)\in A\times B:b=2^a\right\}$.

8. Для каждого из следующих бинарных отношений выяснить, какими свойствами оно обладает и какими не обладает:

1) $R=\left\{(x,y)\in R\times R:x^2=y^2\right\}$;

2) $R=\left\{(x,y)\in R\times R:x^2+y^2=1\right\}$;

3) $R=\{(x,y)\in R\times R:x\cdot y>1\}$;

4) $R=\{(x,y)\in R\times R:y=|x|\}$;

5) $R=\left\{(x,y)\in R\times R:x+x^2=y+y^2\right\}$;

6) $R=\{(x,y)\in Z\times Z:x<y+1\}$;

7) $R=\{(x,y)\in Z\times Z:3\,\mathrm{mod}(x+y)=0\}$;

8) $R=\{(x,y)\in P(Z)\times P(Z):x\subseteq y\}$;

9) $R=\{(x,y)\in P(Z)\times P(Z):x\cap y=\phi\}$.

9. Для каждого из всевозможных пар R_i, R_k, отношений найти композиции $R_i\circ R_k, i,k=1,2,3,4$.

1) $R_1=\{(x,y)\in R\times R: x=y^2\}$; $R_2=\{(x,y)\in R\times R: x+y\le 4\}$;

2) $R_3=\{(x,y)\in R\times R: x^3=y\}$; $R=\{(x,y)\in R\times R: y=\sin x\}$.

10. Показать, что равенство $\varphi\circ\phi=\phi\circ\varphi$ верно не для любых бинарных отношений.

11. Доказать, что для любого бинарного отношения R выполняются условия: $X_{R^{-1}}=Y_R$ и $Y_{R^{-1}}=X_R$.

12. Пусть φ,ϕ,χ - бинарные отношения, определенные на некотором множестве. Доказать следующие утверждения:

1) $(\varphi\setminus\phi)^{-1}=\varphi^{-1}\setminus\phi^{-1}$;
2) $(\varphi\cap\phi)\circ\chi\subseteq(\varphi\circ\chi)\cap(\phi\circ\chi)$;
3) $(\varphi\circ\phi)^{-1}=\phi^{-1}\circ\varphi^{-1}$;
4) $(\varphi\cup\phi)^{-1}=\phi^{-1}\cup\varphi^{-1}\cup\phi^{-1}$;
5) $(\varphi\cup\phi)\circ\chi\subseteq(\varphi\circ\chi)\cup(\phi\circ\chi)$.

13. Привести примеры бинарных отношений:

a) рефлексивных и транзитивных, но не антисимметричных;
b) транзитивных и симметричных, но не рефлексивных;
c) рефлексивных и симметричных, но не транзитивных;
d) рефлексивных и транзитивных, но не симметричных.

14. Доказать, что если R - транзитивное и симметричное бинарное отношение на множестве A, область определения которого совпадает с A, то R рефлексивно.

15. Составить программу нахождения декартова произведения $A\times B$ двух множеств A и B.

16. Пусть $E\subseteq V\times \mathrm{V}$, где V- множество вершин, E- множество ребер. Составить программу которая выводила бы матрицу смежности - $(0,1)$ -матрицу и изображала граф G= (V,E).

5. ФУНКЦИИ (ОТОБРАЖЕНИЯ)

5.1. Основные понятия и определения

Понятие функции является одним из основополагающих как в математике, так и в информатике. В данном случае подразумевается, прежде всего функция, отображающая одно конечное множество в другое конечное множество.

Пусть f - отношение из A в B такое, что $\forall (a,b) \in f \wedge (a,c) \in f \Rightarrow b=c$.

Такое свойство отношения называется однозначностью или функциональностью, а отношение f называется функцией из *A* в *B* и обозначается $f: A \to B$ или $A \xrightarrow{f} B$.

Если $f: A \to B$, то обычно используется префиксная форма записи: $b = f(a) := (a,b) \in f$. Если $b = f(a)$, то a – аргумент, а b - значение функции.

Областью определения функции f называется множество $f_A := \{a \in A : \exists b \in B : b = f(a)\}$.

Областью значений функции f называется множество $f_B := \{b \in B : \exists a \in A : b = f(a)\}$.

Если $f_A = A$, то функция называется тотальной, а если $f_A \neq A$, то функция называется частичной.

Сужением функции $f: A \to B$ называется функция: $f \backslash_M := \{(a,b) \backslash (a,b) \in f \wedge (a \in M)\}$. Для тотальной функции $f = f \backslash_{f_A}$.

Всякому отношению *R* из *A* в *B* $(R \subset A \times B)$ можно сопоставить (тотальную) функцию $R: A \times B \to 0..1$, которая называется характеристической функцией отношения и определяется следующим образом:

$$R(a,b) := \begin{cases} 1, & если \;\; a\,R\,b \\ 0, & если \;\; a\overline{R}b \end{cases}.$$

Функция $f: A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \to B$ называется функцией *n* аргументов или *n*-местной функцией.

5.2. Инъекция, сюръекция и биекция

Пусть $f: A \to B$, тогда функция f называется:
инъективной, если $b = f(a_1) \wedge b = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$;
суръективной, если $(\forall b \in B)(\exists a \in A): b = f(a)$;
биективной, если она инъективна и суръективна.

Биективная функция также называется взаимно - однозначной.

Теорема 5.1. Если $f: A \to B$ - тотальная биекция $f_A = A$, то отношение $f^{-1} \subset B \times A$ (обратная функция) является биекцией.

Доказательство. Поскольку f - биекция, имеем:
$\left(a_1 = f^{-1}(b) \wedge a_2 = f^{-1}(b) \Rightarrow\right)(b = f(a_1) \wedge b = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2)$.

Докажем, что:

а) f^{-1}- функция: $f^{-1} := \{(b,a) / a \in A \wedge b \in B \wedge b = f(a)\}$.
Пусть
$(b_1 = f(a) \wedge b_2 = f(a) \Rightarrow b_1 = b_2) \wedge (b = f(a_1) \wedge b = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2)$.
Тогда $b = f(a_1) \wedge b = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$.

b) f^{-1}- инъекция: пусть $a = f^{-1}(b_1) \wedge a = f^{-1}(b_2)$. Тогда
$b_1 = f(a) \wedge b_2 = f(a) \Rightarrow b_1 = b_2$.

c) f^{-1}- сюръекция. Докажем от противного. Пусть
$\exists a \in A \neg \exists b \in B = f^{-1}(b_1): a = f^{-1}(b)$. Отсюда следует
$b_1 = f(a) \wedge b_2 = f(a) \Rightarrow b_1 = b_2$.Тогда $\exists a \in A: \forall b \in B: a \neq f^{-1}(b)$. Обозначим этот элемент через a_0. Имеем:
$\forall b \in A: a_0 \neq f^{-1}(b) \Rightarrow \forall b: b \neq f(a_0) \Rightarrow a_0 \notin f_A \subset A \Rightarrow a_0 \notin A$.

5.3. Индуцированная функция

Пусть $f: A \to B$, $A_1 \subset A$, $B_1 \subset B$. Тогда множество $F(A_1) := \{b \in B / \exists a \in A_1 : b = f(a)\}$ называется образом множества *А*, а множество $F^{-1}(B_1) := \{a \in A / \exists b \in B_1 : b = f(a)\}$ - прообразом множества B_1.

Функция F является отношением из множества 2^{f_A} в множество 2^{f_B} $\left(F{:}2^{f_A} \to 2^{f_B}\right)$: $F := \{(A_1, B_1) / A_1 \subset A \wedge B_1 \subset B \wedge B_1 = F(A_1)\}$ и называется индуцированной функцией. Функция F^{-1} называется переходом к прообразам.

Теорема 5.2. Если $f{:}A \to B$ - функция, то $F{:}2^{f_A} \to 2^{f_B}$ и $F^{-1}{:}2^{f_B} \to 2^{f_A}$ - также функции.

Пример 5.1. Пусть отображение $f{:}\ R \to R$ задано формулой $f(x) = x^2-1$. Определить, является ли отображение f инъективным, сюръективным, биективным.

Решение. Область определения функции – R, область значений функции – $[-1;+\infty)$.

1) f – отображение. Если $(x,y) \in f$ и $(x,z) \in f$, то $y = z$, так как $(x,y) \in f$, т.е. $y = x^2-1$, $(x,z) \in f$, т.е. $z = x^2-1$.

2) Найдутся $x_1, x_2 \in R$, такие что $x_1 \neq x_2$, но: $f(x_1) = f(x_2)$, например, пусть $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, тогда $f(x_1) = 0$ и $f(x_2) = 0$, т.е. $x_1 \neq x_2$, а $f(x_1) = f(x_2)$. Таким образом, это не инъективное отображение.

3)Так как область значений функции $[1;+\infty)$ не совпадает с R, то отображение не сюръективно.

Пример 5.2. Пусть $f{:}\ R \to R$ задано формулой $f(x) = x^4$. Является ли отображение инъективным, сюръективным?

Решение.

1)Поскольку $x_1=2 \in R$, $x_2 = -2 \in R$, $f(2) = f(-2) = 16$, т.е. $x_1 \neq x_2$, а $f(x_1) = f(x_2)$, то отображение не инъективно.

2)Для любого $x \in R$ не существует $f(x)$, такого что $f(x) = -16$, так как $x^4 \neq -16$, поэтому отображение не сюръективно.

Пример 5.3. Пусть отображение $f{:}\ [0;+\infty) \to [0;+\infty)$ задано формулой $f(x)=x^2$. Является ли оно инъективным, сюръективным?

Решение.

1. Для любых $x_1, x_2 \in [0;+\infty)$, $x_1 \neq x_2$, $f(x_1)=x_1^2$, $f(x_2)=x_2^2$, но $f(x_1) \neq f(x_2)$, т.е для каждого x существует единственное $f(x)$, следовательно, $f(x)$ - инъективное отображение.

2. Для каждого значения $f(x)\in[0;+\infty)$ найдётся $x\in[0;+\infty)$, поэтому $f(x)$ - сюръективное отображение. Из 1. и 2. следует, что отображение биективно.

5.4. Принцип Дирихле

Пусть $f:A\to B$ функция, A,B – конечные множества, $|A|=n$.

Лемма 5.1. (Принцип Дирихле). Если $|A|>|B|$, то по крайней мере одно значение f встретится более одного раза (или найдется пара элементов $a_i\neq a_j$, для которых $f(a_i)=f(a_j)$).

Докажем методом от противного. Предположим, что для любой пары $a_i\neq a_j$ выполняется $f(a_i)\neq f(a_j)$. Тогда $|B|\geq n$, что противоречит условию $n=|A|>|B|$. Принцип Дирихле можно обобщить следующим образом. Пусть $f:A\to B$ функция, причем A,B – конечные множества, $|A|=n$. Если $|A|>k|B|$ для некоторого натурального числа k, то найдется такое значение функции f, которое она будет принимать по крайней мере k+1 раз. Лемма 5.1. доказана.

Пример 5.4. Показать, что среди любых шести цифр, выбранных из множества $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, найдутся хотя бы две из них, сумма которых равна 11.

Решение. Обозначим через A – множество выбранных шести цифр, а через B - множество пар цифр, сумма которых равна 11: $B=\{(1,10),(2,9),(3,8),(4,7),(5,6)\}$.

Рассмотрим функцию $f:A\to B$, сопоставляющую каждой цифре из шестерки пару из множества B, которая в ней содержится. Например, $f(5)=(5,6)$. По принципу Дирихле хотя бы две цифры из множества A попадут в одну и ту же пару.

Пример 5.5. Показать, что в любой группе из шести человек найдутся трое попарно знакомых, или трое попарно незнакомых.

Решение. Пусть x - один из шести людей, A — множество оставшихся пяти людей в группе и $B=\{0,1\}$. Определим функцию $f:A\to B$ по правилу:

$$f(a)=\begin{cases}1, & \text{если } a \text{ знаком с } x\\ 0, & \text{если } a \text{ не знаком с } x\end{cases}.$$

Поскольку 5 = |A| > $2\backslash B\backslash$, то найдется три человека, которые либо все знакомы с *x,* либо все трое его не знают.

Предположим теперь, что три человека *a,* b и *c* знакомы с *x.* Если все три друг с другом не знакомы, то мы получаем решение задачи. В противном случае, какая-то пара из трех знает друг друга. Но они же попарно знакомы и с *x.* Стало быть, трое людей: a**,** b и **c** - попарно знакомы. Аналогично разбирается случай, когда *a,* b и *c* не знакомы с *x.*

Задачи и упражнения

1. Пусть *R* - отношение «(...родитель...», а *S* — отношение «...брат...» на множестве всех людей. Дать краткое описание отношениям: $R^{-1}, S^{-1}, R \circ S, S \circ R, R \circ R$.

2. Отношения *R* и *S* заданы матрицами *M* и *N* соответственно, где $M = \begin{pmatrix} TFF \\ TFT \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} TFTT \\ TTFF \\ FTTT \end{pmatrix}$. Вычислить булево произведение *MN.*

Какое отношение задается этим произведением?

4. Пусть *A* = {0, 2, 4, 6} и *B* = {1, 3, 5, 7}. Какие из нижеперечисленных отношений между множествами *A* и *B* являются функциями, определенными на *A* со значениями в B?

(a) {(6,3), (2, 1), (0,3), (4,5)};
(b) {(2,1), (4,5), (6,3)};
(c) {(2,3), (4,7), (0, 1), (6,5)};
(d) {(6, 1), (0, 3), (4, 1), (0, 7), (2, 5)}.

5. Выяснить, какие из следующих функций, чьи области определения и значений совпадают с Z, являются инъекциями, сюръекциями или биекциями:

a)f(a) = 2n + 1;

b) $f(a) = \begin{cases} \frac{n}{2}, \text{если n четно} \\ 2n, \text{если n нечетно} \end{cases}$

c) $f(a) = \begin{cases} 1, \text{если a знаком с x} \\ 0, \text{если a не знаком с x} \end{cases}$.

6. Какие из найденных функций инъективны, а какие сюръективны?

7. Функция, называемая *целой частью числа,* сопоставляет вещественному числу x наибольшее целое число, не превосходящее x, и обозначается так: $\lfloor x \rfloor$.

(a) Пусть .4 = {-1, 0, 1, 2} и функция $f : A \to Z$ определяется условием: $f(x) = \left\lfloor \frac{x^2+1}{3} \right\rfloor$. Найти множество значений *f*.

(б) Определить, является ли функция $g : A \to Z$, заданная формулой $g(n)=\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ инъективной, суръективной или биективной.

8. Функция $f:A\to B$ задана формулой: $f(x)=1+\frac{2}{x}$, где *A* обозначает множество вещественных чисел, отличных от 0, а B - множество вещественных чисел без 1. Показать, что f биективна и найти обратную к ней функцию.

9. Функции $f:R\to R$ и $g:R\to R$ заданы условием: $f(x)=x^2$ и $g(x)=\begin{cases} 2x+1, x\geq 0 \\ -x, x<0 \end{cases}$. Выразить формулами композиции: $f\circ g, g\circ f, g\circ g$.

10.Пусть $f:A\to B$ и $g:B\to C$ - функции. Доказать, что

а) если f и g инъективны, то $g\circ f$ тоже инъективна;

b) если f и g сюръективны, то $g\circ f$ тоже сюръективна;

c) если f и g обратимые функции, то $(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$

11. а) Сколько *раз* нужно бросить игральную кость, чтобы какое-то число на ней выпало по крайней мере дважды?

b) Сколько раз нужно бросить две игральные кости, чтобы с гарантией можно было утверждать: сумма выпавших очков появится по крайней мере дважды?

c) Сколько карт необходимо вытащить из стандартной колоды в 52 карты, чтобы обязательно попались хотя бы две одной масти?

d) Сколько карт необходимо вытащить из стандартной колоды в 52 карты, чтобы обязательно попались хотя бы четыре одной масти?

12.Известно, что в одном селе проживает 79 семей, в каждой из которых по 2 ребенка.

a) Показать, что найдется по крайней мере две семьи, в которых совпадают месяцы рождения обоих детей, т.е. в первой и во второй семье дети родились в январе и мае.

b) Доказать, что по крайней мере у шестерых детей имена начинаются с одной и той же буквы.

13. Пусть $S = \{1, 2. ...,20\}$.

a) Какое наименьшее количество четных чисел необходимо взять из множества S, чтобы по крайней мере два из них в сумме давали 22?

b) Показать, что если выбрать 11 элементов из множества S, то по крайней мере одно из этих чисел будет делить какое-то из оставшихся в выборке. (Указание: использовать функцию f, которая сопоставляет каждому целому числу его наибольший нечетный делитель. Например, $f(12) = 3$.)

6. ОТНОШЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение R на множестве X называется отношением эквивалентности на множестве X. Для отношения эквивалентности вместо записи $(x,y)\in R$ часто используют запись $x\approx y$ или $x\equiv y$ (x эквивалентен y).

Пример 6.1. Отношения равенства чисел и множеств, отношение равномощности множеств являются отношениями эквивалентности.

6.1. Классы эквивалентности

Пусть $\equiv$ - отношение эквивалентности на множестве M и $x\in M$. Классом эквивалентности, порожденным элементом x, называется подмножество множества M, состоящее из тех элементов $y\in M$, для которых $(x,y)\in R$. Класс эквивалентности, порожденный элементом x, обозначается через $[x]_{\equiv}:=\{y\in M:(x,y)\in R\}$, т.е. это есть подмножество элементов множества M, эквивалентных x: $[x]_{\equiv}:=\{y\,/\,y\in M\wedge y=x\}$. Если отношение подразумевается, то индекс $\equiv$ можно опустить.

Лемма 6.1. $\forall a\in M:[a]\neq\phi$.

Доказательство. $a=a\Rightarrow a\in[a]$.

Лемма 6.2. $a\equiv b\Rightarrow[a]=[b]$.

Доказательство. Пусть $a\equiv b$. Тогда

$x\in[a]\Rightarrow x\equiv a\wedge a\equiv b\Rightarrow x\equiv b\Rightarrow x\in[b]$;

$x\in b\Rightarrow x\equiv b\Rightarrow x\in b\wedge a\equiv b\Rightarrow x\equiv b\wedge b\equiv a\Rightarrow x\equiv a\Rightarrow x\in[a]$.

Лемма 6.3. $\neg(a\equiv b)\Rightarrow[a]\cap[b]=\phi$.

Доказательство. От противного. Пусть $[a]\cap[b]\neq\phi$. Тогда $\exists c\in[a]\cap[b]\Rightarrow\Rightarrow c\in[a]\wedge c\in[b]\Rightarrow(c\equiv a)\wedge(c\equiv b)\Rightarrow a\equiv b$.

Теорема 6.1. Всякое отношение эквивалентности на множестве M разбивает M, причем среди элементов разбиения нет пустых; и обратно, всякое разбиение множества M , не содержащих пустых элементов определяет отношение эквивалентности на M:

$$\equiv\subset M^2\Leftrightarrow\exists B=\{B_i\}:B_i\in M\wedge B_i\neq\phi\wedge M=\cup B_i\wedge\forall i,j:i\neq j\Rightarrow B_i\cap B_j=\phi.$$

Доказательство.

1. Необходимость. Построение требуемого разбиения обеспечивается следующим алгоритмом.

Вход: $\equiv, M$

Выход: разбиение *B* множества *M*.

$U := M; B = \phi$

While $U \neq \phi$ do

Select $a \in U$ {выберем любой элемент из M}

$A := Eq(a, M, \equiv)$ {построим его класс эквивалентности}

For $b \in M$ do

If $b \equiv a$ then yield b end if

end for

return A

$U := U \setminus A$ {удалим класс из M}

$B = B \cup \{A\}$ {и добавим в разбиение}

end while.

2. Достаточность. Пусть $a \equiv b := \exists i : a \in B_i \wedge b \in B_i$. Тогда

a) рефлексивность:
$M = \cup B_i \Rightarrow (\forall a \in M) \exists i : a \in B_i \wedge a \in B_i \Rightarrow a \equiv a$;

b) симметричность:
$a \equiv b \Rightarrow \exists i : a \in B_i \wedge b \in B_i \Rightarrow b \in B_i \wedge a \in B_i \Rightarrow b \equiv a$;

c) транзитивность:
$a \equiv b \wedge b \equiv c \Rightarrow [a] = [b]_i \wedge [b] = [c] \Rightarrow [a] = [c] \Rightarrow a \equiv c$.

6.2. Фактор - множества

Разбиением множества *M* называется совокупность попарно непересекающихся подмножеств *M* таких, что каждый элемент множества *M* принадлежит одному и только одному из этих подмножеств.

Всякое разбиение множества *M* определяет на *M* отношение эквивалентности *R*: $(x, y) \in R$ тогда и только тогда, когда *x* и *y* принадлежат одному подмножеству разбиения. С другой стороны, всякое отношение эквивалентности *R* определяет разбиение множества *M* на классы эквивалентности относительно этого отношения.

Совокупность классов эквивалентности элементов множества M по отношению эквивалентности R называется фактор - множеством множества M по отношению R и обозначается $M/R := \{[x]_R\}_{x\in M}$.

Фактор - множество является подмножеством булеана $M/R \subset 2^M$.

Пример 6. 1. Доказать, что бинарное отношение на множестве целых чисел $R=\{(x,y)\in Z\times Z: x=y\}$ является отношением эквивалентности, и построить соответствующее ему фактор-множество Z/R.

Решение. Проверку рефлексивности, симметричности и транзитивности данного бинарного отношения выполните самостоятельно. Построим классы эквивалентности для данного отношения эквивалентности. Класс эквивалентности, порожденный любым элементом $x\in Z$, имеет вид
$[x]=\{y\in Z: x\approx y\}=\{y\in Z: x=y\}=\{x\}$.

Таким образом, для данного отношения эквивалентности класс эквивалентности, порожденный элементом $x\in Z$, состоит только из этого элемента x и фактор - множество Z/R имеет вид $Z\backslash R := \{\{x\}: x\in Z\}$.

Пример 6.2. Пусть m - некоторое натуральное число. Проверить, является ли отношением эквивалентности следующее бинарное отношение на множестве целых чисел:
$R=\{(x,y)\in Z\times Z: (x-y)\,\mathrm{mod}\, m=0\}$.
Построить фактор-множество Z/R.

Решение. Проверим три основных свойства для отношения эквивалентности.

1. Рефлексивность. Для произвольного $x\in Z$ разность $(x-x)\,\mathrm{mod}\, m=0$ (нуль) делится на любое число $0\,\mathrm{mod}\, m=0 \Rightarrow (x,x)\in R$.

2. Симметричность. Пусть
$(x,y)\in R \Rightarrow \exists k\in Z: x-y=km \Rightarrow \exists k\in Z: y-x=-km \Rightarrow (y,x)\in R$.

3. Транзитивность. Пусть
$(x,y)\in R, (y,x)\in R \Rightarrow \exists k,n\in Z: x-y=km, y-z=nm \Rightarrow \exists k,n\in Z: x-z=(k+n)m \Rightarrow$
$\exists r=(k+n)\in Z: x-z=rm \Rightarrow (x,z)\in R$. Получили, что данное отношение R является отношением эквивалентности. Построение классов эквивалентности начнем с класса эквивалентности, порожденного $0\in Z$:

$$[0]:=\{y\in Z: 0\approx y\}=\{(0-y)\vdots m\}=\{(y\in Z)\exists k\in Z: 0-y=k\cdot m\}=\{(y\in Z)\exists k\in Z: y=-k\cdot m\}$$
$$=\{(y\in Z)\exists k\in Z: y=-k\cdot m\}=\{0,m,-m,2m,-2m,...,km,-km,...\}.$$

Если $m = 1$, то данный класс эквивалентности - $[0] = Z$, других классов эквивалентности не существует, и $Z\backslash R:=\{[0]\}$. Если $m > 1$, то существуют элементы, не попавшие в построенный класс, например, элемент 1. Построим класс эквивалентности, порожденный элементом1:

$$[1]:=\{y\in Z: 1\approx y\}=\{(1-y)\vdots m\}=\{(y\in Z)\exists k\in Z: 1-y=k\cdot m\}=\{(y\in Z)\exists k\in Z: y=1-k\cdot m\}=$$
$$=\{1,1-m,1+m,1-2m,1+2m,...,1-km,1+km,...\}.$$

При $m = 2$ построенные два класса эквивалентности при объединении дают все множество Z, и поэтому построение классов эквивалентности закончено, в противном случае существует элемент, например 3, не попавший ни в один из этих классов эквивалентности, и нужно перейти к построению класса эквивалентности, порожденного 2. Продолжая данный процесс, при любом m мы построим классы эквивалентности$[0],[1],...,[m-1]$, которые не пересекаются и при объединении дают все множество Z. Имеем:

$$Z/R=\{\{n,n-m,n+m,...,n-km,n+km,...\}: n=1,2,...,m-1\}.$$

Пример 6.3. На плоскости P выбрана некоторая декартова прямоугольная система координат и заданы три отношения эквивалентности:

$$R_1=\{(a_1,a_2),(b_1,b_2)\in P\times P: a_1=b_1, a_2-b_2\in Z\};$$
$$R_2=\{(a_1,a_2),(b_1,b_2)\in P\times P: a_1-b_1\in Z, a_2-b_2\in Z\};$$
$$R_3=\{(a_1,a_2),(b_1,b_2)\in P\times P: a_1-b_1+a_2-b_2\in Z\}.$$

Найти фактор – множество для данных отношений эквивалентности.

Решение. Построим фактор - множество для отношения R_1. Класс эквивалентности, порожденный произвольным элементом $(a_1,a_2)\in P$, имеет вид

$$[(a_1,a_2)]=\{(x,y)\in P: (a_1,a_2),(x,y)\in R_1\}=\{(x,y)\in P: x=a_1, a_2-y\in Z_1\}=$$
$$=\{(x,y)\in P: \exists k\in Z: x=a_1, a_2-y=k\}=\{(x,y)\in P: \exists k\in Z: x=a_1, y=a_2-k\}=$$
$$=\{(a_1,a_2-k)\in P: k\in Z\}.$$

Таким образом, в класс эквивалентности, порожденный элементом $(a_1,a_2)\in P$, $a_1\in R_1, 0\le a_2<1$ попадают вместе с элементом$(a_1,a_2)\in P$ элементы, у которых первая координата равна a_1, а вторая координата отличается от a_2 на целое число. Классы эквивалентности, порожденные элементами с $a_1\in R_1$, $0\le a_2<1$, не пересекаются и в объединении дают все множество P. Следовательно, фактор-множество P/R_1 можно записать в виде: $P/R_1 = \{\{(\alpha, \beta + k) : k \in Z\} : \alpha \in R, \beta \in [0,1]\}$. Фактор-множества для отношений R_2, R_3 постройте самостоятельно.

Пример 6. 4. Придумать минимальное (по числу элементов) отношение эквивалентности R на множестве $A = \{1,2,3,4,5\}$ так, чтобы $(1,2) \in R$ и $(2,3) \in R$.

Решение. Отношение эквивалентности рефлексивно, поэтому данному отношению обязательно должны принадлежать пары (1,1), (2,2),(3,3), (4,4), (5,5). Отношение эквивалентности симметрично, поэтому наряду с парами (1,2), (2,3) данному отношению обязаны принадлежать пары (2,1), (3,2). В силу транзитивности отношения R ему обязана принадлежать вместе с парами (3,2), (2,1) пара (3,1) (и, следовательно, (1,3)). Таким образом, минимальное отношение эквивалентности, которое можно построить, имеет вид:

$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (3,1), (1,3)\}$.

Пример 6. 5. Доказать, что $M = \{\{1\}, \{2,5\}, \{3\}, \{4,6,7\}\}$ - разбиение множества A = {1,2,3,4,5,6,7} и перечислить все элементы отношения эквивалентности R, соответствующего разбиению M.

Решение. Семейство M является разбиением множества A, поскольку множества, являющиеся элементами множества M, не пересекаются и при объединении дают все множество A. Отношение эквивалентности, соответствующее данному разбиению, строится по правилу $(x, y) \in R$ тогда и только тогда, когда x и y принадлежат одному подмножеству разбиения, т.е.

$R = \{(1,1),(2,2),(5,5),(2,5),(5,2),(4,4),(6,6),(7,7),(4,6),(6,4),(4,7),(7,4),$
$(6,7),(7,6),(3,3)\}$.

Пример 6.6. Показать, что объединение двух отношений эквивалентности может и не являться отношением эквивалентности.

Решение. На множестве $A = \{1,2,3,4,5\}$ рассмотрим два отношения эквивалентности

$R_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,2), (2,1), \}$;

$R_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (3,2), (4,4), (5,5), (2,3),\}$.

Объединение данных отношений эквивалентности

$R_1 \cup R_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (2,1), (1,2), (3,2), (2,3)\}$ не является отношением эквивалентности, так как для него не выполнено свойство транзитивности, $(3,2) \in R_1 \cup R_2$, $(2,1) \in R_1 \cup R_2$, а $(3,1) \notin R_1 \cup R_2$.

7. ОТНОШЕНИЯ ПОРЯДКА

7.1. Определения

Рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение называется отношением порядка.

Отношение порядка может быть и рефлексивным, тогда оно называется отношением нестрогого порядка.

Отношение порядка может быть и антирефлексивным, тогда оно называется отношением строгого порядка.

Отношение порядка на множестве *A*, для которого любые два элемента сравнимы, называется полным (линейным).

Отношение порядка может не обладать свойством полноты, тогда оно называется отношением частичного порядка.

Обычно отношение строгого порядка обозначается знаком $<$, а отношение нестрогого порядка – знаком $\leq$. Отношение порядка в общем случае обозначается знаком $\prec$.

Пример 7.1. Отношение $<(\leq)$ на множестве чисел – отношение строгого (нестрогого) полного порядка. Отношение $\subset$ на булеане 2^M - отношение нестрогого частичного порядка.

Множество *M,* на котором определено отношение порядка, называется упорядоченным множеством и вместо записи $(x,y)\in R$ для данного отношения часто используют запись $x\prec y$. т.е. для любых $(x,y)\in M$ выполнено либо $x\prec y$, либо $y\prec x$. Множество *M,* на котором определено отношение полного порядка, называется вполне упорядоченным.

Пример 7.2. Множество чисел линейно упорядочено, а булеан упорядочен частично.

7.2. Минимальные элементы

Элемент *x* упорядоченного множества *M* называется минимальным, если не существует меньших элементов:
$x-\min \Rightarrow \neg\exists y\in M y\prec x\wedge y\neq x$.

Теорема 7.1. Во всяком конечном непустом частично упорядоченном множестве существует минимальный элемент.

Доказательство. От противного. Пусть
$\neg(\exists x\in M \neg\exists y\in M y\prec x\wedge y\neq x) \Rightarrow \forall x\in M \exists y\in M y\prec x \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists (u_i)_{i=1}^{\infty} \forall i u_{i+1}\prec u_i \wedge u_{i+1}\neq u_i$. Так как $|M|<\infty$, то $\exists i,j: i<j\wedge u_i=u_j$.

Поскольку множество M – частично упорядочено, то выполняется свойство транзитивности
$u_i \succ u_{i+1} \succ \cdots \succ u_j \Rightarrow u_{i+1} \succ u_j = u_i$. Таким образом,
$u_{i+1} \prec u_{j+1} \wedge u_{i+1} \succ u_i \Rightarrow u_{i+1} = u_i$ - противоречие. Теорема 7.1 доказана.

Теорема 7.2. Всякий частичный порядок на конечном множестве может быть дополнен до линейного.

Доказательство. Требуется доказать, что существует отношение полного порядка, которое является надмножеством заданного отношения частичного порядка. Доказательство обеспечивается алгоритмом топологической сортировки:
Вход: частично-упорядоченное множество *U*.
Выход: вполне упорядоченное множество *W*.

```
While U ≠ ϕ do
m:=M(U) {функция M возвращает минимальный элемент}
yield m {такой элемент существует по теореме 7.1}
U:=U\{m}
end while
```

Существование функции *M* обеспечивается теоремой 7.1. Всякая процедура, генерирующая объекты с помощью оператора yield определяет линейный порядок (последовательность, в которой объекты генерируются во время работы процедуры) на множестве своих результатов. Таким образом, теорема 7.2 доказана.

Пусть X - непустое конечное множество, на котором задано отношение частичного порядка. Говорят, что элемент y покрывает элемент x, если $x \le y$, и не существует такого элемента u , что $x \le u \le y$. Для $x \le y$ можно записать $x = x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n = y$, где x_{i+1} покрывает x_i .

Частично упорядоченные множества можно изображать с помощью так называемых диаграмм Хассе. На диаграмме Хассе элементы частично упорядоченного множества изображаются точками на плоскости. Если элемент y покрывает элемент x , то точки x и y соединяются отрезком, причем точку, соответствующую x, располагают ниже y.

Пример 7.1. Доказать, что отношение $R=\{(x,y)\in R\times R: x\le y\}$ является отношением порядка на множестве R, является ли это отношение отношением линейного порядка.

Решение. Для доказательства проверим три свойства данного отношения: рефлексивность, антисимметричность, транзитивность.

1. Рефлексивность.

$\forall x\in R: x=x \Rightarrow (x,x)\in R$.

2. Антисимметричность.

Пусть $(x,y)\in R, (y,x)\in R \Rightarrow (x\le y)\wedge(y\le x) \Rightarrow x=y$.

3. Транзитивность.

Пусть $(x,y)\in R, (y,z)\in R \Rightarrow \exists (x\le y)\wedge(y\le z) \Rightarrow x\le z \Rightarrow (x,z)\in R$. Данное отношение является отношением линейного порядка, так как $\forall x,y\in R: (x\le y)\vee(y\le x)$.

Пример 7.2. Показать, что композиция двух отношений частичного порядка может не являться отношением частичного порядка.

Решение. На множестве $A = \{1,2,3,4,5\}$ рассмотрим два отношения частичного порядка

$R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5), (1,2),(2,1),(1,3)\}$;

$R_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,5), (5,2), (2,3)\}$.

Композиция

$R_1 \circ R_2 = (1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(2,1),(1,3),(1,5),(5,2),(2,3)\}$.

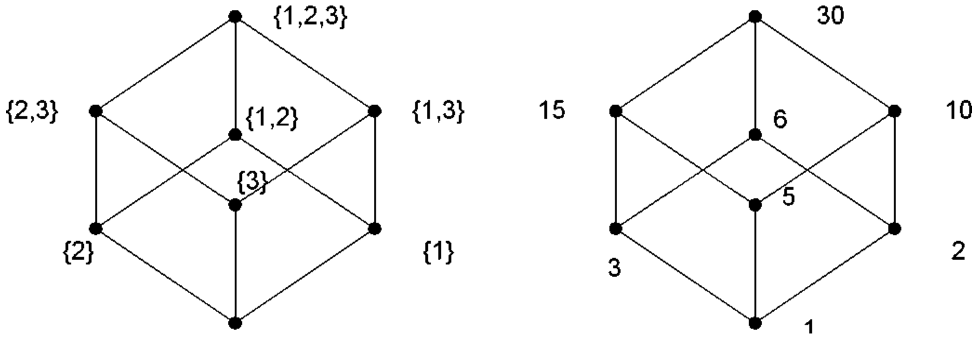
не является отношением частичного порядка, так как для него нарушено свойство транзитивности: $(5,2)\in R_1\circ R_2$, $(2,3)\in R_1\circ R_2$, $(5,3)\notin R_1\circ R_2$.

Пример 7.3. Построить диаграммы Хассе для отношений частичного порядка:

1) $R_1=\{(x,y)\in P(A)\times P(A): x\subseteq y\}, A=\{1,2,3\}$;

2) $R_2=\{(x,y)\in A\times A: y \bmod x=0\}, A=\{1,2,3,5,6,10,15,30\}$.

Решение.



1 2

Рис.9.1. Диаграммы Хассе.

В некоторых случаях можно расширить незамкнутый объект так, чтобы он стал замкнутым.

8. ЗАМЫКАНИЕ ОТНОШЕНИЙ

8.1. Замыкание отношения

Пусть R, R' - отношения на множестве M. Отношение R' называется замыканием R относительно свойства C, если:
1. R' обладает свойством C: $C(R')$
2. R' является надмножеством $R: R \subset R'$;
3. R' является наименьшим: $C(R'') \wedge R \subset R'' \Rightarrow R' \subset R''$.

8.2. Транзитивное замыкание

Пусть R^+, R^* - объединение положительных, неотрицательных степеней соответственно $R^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$, $R^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} R^i$.

Теорема 8.1. R^+ - транзитивное замыкание R.

Доказательство. Пусть C - свойство транзитивности. Проверим выполнение свойств замыкания.

1. Пусть
$aR^+b \wedge bR^+c \Rightarrow \left(\exists n : aR^n b \wedge \exists m : bR^m c \Rightarrow \exists c_1,\ldots,c_{n-1} : aRc_1R\ldots Rc_{n-1}Rb\right) \wedge$
$\left(\exists d_1,\ldots,d_{n-1} : bRd_1R\ldots Rd_{n-1}Rc\right) \Rightarrow aR^{n+m+1}c \Rightarrow aR^+c$.

2. $R = R^1 \Rightarrow R \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \Rightarrow R \subset R^+$.

3. $aR^+b \Rightarrow \exists k : aR^k b \Rightarrow \exists c_1,\ldots,c_{k-1} : aRc_1R\ldots Rc_{k-1}Rb$;
$R \subset R'' \Rightarrow c_1,\ldots,c_{k-1} : aR''c_1R''\ldots R''c_{k-1}R''b \Rightarrow aR''b$. Таким образом, $R^+ \subset R''$. Теорема 8.1 доказана.

Теорема 8.2. R^+ - рефлексивное транзитивное замыкание R.

Вычислить транзитивное замыкание отношения можно следующим образом: $R^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = \bigcup_{i=1}^{n} R^i \Rightarrow \left\|R^+\right\| = \bigvee_{i=1}^{n} \left\|R^i\right\| = \bigvee_{i=1}^{n} \left\|R\right\|^i$.

Такое вычисление имеет сложность $O\left(n^4\right)$.

8.3. *Алгоритм Уоршалла*

Рассмотрим алгоритм нахождения транзитивного замыкания отношения R на множестве $A, |A| = n$ сложности $O\left(n^3\right)$.

Алгоритм Уоршалла

Вход: отношение, заданное матрицей $\|A\|_{n \times n}$.

Выход :транзитивное отношение, заданное матрицей $\|TR\|_{n \times n}$.

```
TR;=R
      for  I from 1 to n do
for  j from 1 to n do
      for  k  from 1 to n do
TR[j,k]:= TS[j,k] ∨ TS[j,k] ∧TS[i,k]
 endfor
      endfor
      TS;=TR
      Endfor
```

Обоснование алгоритма Уоршалла

Алгоритм является циклическим, телом которого является оператор *TR[j,k]:= TS[j,k]* $\vee$ *TS[j,k]* $\wedge$*TS[i,k]*. Циклические действия этого оператора заключается в следующем. На каждом шаге основного цикла по i в транзитивное замыкание добавляются такие пары элементов *TS[j,k]:=1* с номерами *j* и *k,* для которых существует последовательность элементов с номерами в диапазоне $[1,i]$, связанных отношением R. Таких элементов с номерами в диапазоне $[1,i]$, связанных отношением R для элементов с номерами *j* и *k*, существует в одном из двух случаев: либо уже существует последовательность элементов в диапазоне $[1,i-1]$ с номерами *j* и *k,* либо существуют две последовательности элементов с номерами в диапазоне $[1,i-1]$ с номерами *j* и *i*- одна для пары элементов с номерами *j* и *i,* а вторая- для пары элементов с номерами *i* и *k.* После окончания основного цикла в качестве промежуточных рассмотрены все элементы и транзитивное замыкание построено.

Задачи и упражнения

1. Доказать, что каждое из следующих отношений является отношением эквивалентности, и найти классы эквивалентности:

   1) $R=\{(x,y)\in P(A)\times P(A):|x|=|y|\}, A=\{1,2,3\}$;

   2) $R=\left\{(a,b),(c,d)\in N^2\times N^2:a+d=c+b\right\}$;

   3) $R=\left\{(x,y)\in R\times R:x^2=y^2\right\}$;

   4) $R=\{(x,y)\in P(A)\times P(A):\forall A(x+y)-конечное\}$.

2. На множестве N задано бинарное отношение по следующему правилу: $(x,y)\in R$ тогда и только тогда, когда последняя цифра в десятичной записи числа x совпадает с последней цифрой в десятичной записи числа y . Доказать, что данное отношение является отношением эквивалентности. Сколько элементов в фактор - множестве N / R ?;

3. На R задано бинарное отношение

$$R=\left\{(x,y)\in R\times R:x^2+x=y^2+y\right\}.$$

Доказать, что R - отношение эквивалентности. Сколько элементов может содержать класс эквивалентности? Существует ли класс эквивалентности, состоящий из одного элемента?;

4. Показать, что пересечение отношений эквивалентности, определенных на некотором множестве A, является отношением эквивалентности.

5. Доказать, что если R - отношение эквивалентности, то R^{-1} - также отношение эквивалентности.

6. Какие из следующих подмножеств множества $P(R)$ образуют разбиение R? Для каждого разбиения задать соответствующее отношение эквивалентности:

   1) $\{\{x\in R:x>0\},\{x\in R:x<0\}\}$;

   2) $\{\{x\in R:x>0\},\{x\in R:x<0\},\{0\}\}$;

   3) $\{(n,n+1):n\in Z\}$;

   4) $\{[n,n+1]:n\in Z\}$;

   5) $\{(n,n+1]:n\in Z\}$.

7. Пусть $A_1 = \{a_1 ,a_2,..., a_n \}$, $A_2 = \{b_1, b_2,..., b_n \}$ - два разбиения множества K. Доказать, что множество всех непустых подмножеств вида $A_i\cap B_J$ также является разбиением множества K . Какое отношение эквивалентности соответствует этому разбие-

нию, если разбиению m_1 соответствует отношение R_1, а разбиению m_2 - отношение R_2 ?

8. Доказать, что отношение $R=\{(x,y)\in N\times N : y \bmod x=0\}$ является отношением порядка. Является ли это отношение отношением линейного порядка? Является ли аналогичное отношение отношением порядка, если его рассматривать на множестве Z ?

9. Доказать, что отношение $R=\{(x,y)\in N\times N : (y \bmod x=0)\vee(x<y)\}$ является отношением линейного порядка.

10. На множестве всевозможных разбиений данного множества рассмотрим отношение: $(M_1,M_2)\in R$, если $(\forall A\in M_1)(\exists B\in M_2): A\subseteq B$. Доказать, что рассматриваемое отношение является отношением порядка. Является ли оно линейным порядком?

11. Показать, что если R - отношение частичного порядка на множестве A, то обратное к нему отношение R^{-1} тоже устанавливает частичный порядок на множестве А. Какова связь между максимальным и минимальным элементами относительно R и R^{-1}?

12. Перечислить всевозможные линейные порядки на множестве *{1,2}*, на множестве *{1,2,3}*. Высказать предположение о числе линейных порядков на множестве из n элементов.

13. Пусть R_1 - отношение порядка на множестве A, R_2 - отношение порядка на множестве B. Доказать, что отношение

$\varphi=\{((a_1,a_2),(b_1,b_2))\in(A\times B)\times(A\times B) : (a_1,b_1)\in R_1,(a_2,b_2)\in R_2\}$

есть отношение порядка.

14. Пусть $Q=\left\{(m,n)/\ m,n\in N\wedge m=n^2\right\}$. Какими свойствами обладает отношение Q**?**

15. Для следующего отношения порядка постройте диаграмму Хассе: $A = \{ 1,2 ,3 ,4,5, 6,7,8\}$, $R=\{(x,y)\in A\times A : x<y\}$.

9. КОМБИНАТОРИКА

9.1. Основные правила комбинаторики

Правило суммы

Правило суммы для двух объектов: Пусть объект a можно выбрать $n_1 = |A|$ способами, объект b - $n_2 = |B|$ способами, и существует $n_{12} = |A \cap B|$ общих способов выбора объектов a и b , тогда один из объектов «a или b» $n = |A \cup B|$ можно выбрать $n = n_1 + n_2 - n_{12}$ способами.

Пример 9.1. Сколькими способами из 28 костей домино можно выбрать кость, на которой есть «2» или «5».

Решение. Выбрать кость, содержащую «2», можно 7-ю способами, содержащую «5» - тоже 7-ю способами, но среди этих способов есть один общий - это выбор кости «2 : 5». В соответствии с правилом суммы общее число способов выбора нужной кости можно осуществить 7 + 7 - 1 = 13 способами.

Правило суммы можно сформулировать для произвольного числа объектов. Для этого достаточно использовать формулу для мощности объединения конечного числа множеств. Обозначим через $n_1 = |A|, n_2 = |B|, n_3 = |C|$,

$n_{12} = |A \cap B|, n_{13} = |A \cap C|, n_{23} = |B \cap C|, n_{123} = |A \cap B \cap C|$. Тогда в случае трёх объектов формула имеет вид:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Правило суммы для трёх объектов:

Если объект a можно выбрать n_1 способами, объект b - n_2 способами, объект c - n_3 способами, и известны n_{12} общих способов выбора одного из объектов a и b, n_{13} общих способа выбора одного из объектов a и c, n_{23} общих способов выбора одного из объектов b и c, а также известно n_{123} общих способов выбора одного их объектов a, b и c , то число всех способов выбора одного из объектов «a или b или c» вычисляется по формуле:

$$n = n_1 + n_2 + n_3 - n_{12} - n_{13} - n_{23} + n_{123}. \qquad (9.1)$$

Пример 9.2. В ходе экзаменационной сессии 12 студентов получили оценки «отлично», 12 - «хорошо», 13 - «удовлетворительно», 5 - хорошо» и «отлично», 7 - «хорошо» и «удовлетворительно», 8 - «удовлетворительно» и «отлично». У трех студентов все виды оценок. Сколько студентов в группе, если известно, что все они сдали сессию? Сколько отличников в группе? Сколько в группе «чистых» троечников?

Решение. В условиях задачи $n_1 = 12$, $n_2 = 12$, $n_3 = 13$, $n_{12} = 5$, $n_{23} = 7$, $n_{13} = 8$, $n_{123} = 3$. По формуле (1) находим общее число студентов в группе: $12 + 13 + 12 - 5 - 7 - 8 + 3 = 20$; число отличников в группе равно: $n_1 - (n_{12} + n_{13}) + n_{123} = 12 - (5 + 8) + 3 = 2$; число «чистых» троечников равно $n_3 - (n_{13} + n_{23}) + n_{123} = 13 - (8 + 7) + 3 = 1$.

Правило произведения

Правило произведения для двух объектов: Пусть объект a можно выбрать n способами, и после каждого такого выбора объект b можно выбрать m способами. Тогда выбор пары «a и b» в указанном порядке можно осуществить $n \times m$ способами.

Пример 9.3. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из букв слова «студент»?

Решение. Гласную букву можно выбрать 2-мя способами, согласную можно выбрать 5-ю способами. По правилу произведения выбор «гласной и согласной» можно осуществлять 2 x 5 = 10 способами.

Пример 9.4. Сколько существует двузначных четных чисел в десятичной системе счисления?

Решение. Выбираются две цифры из множества $\{0,1,2,...,8,9\}$. Первая цифра может быть любой, кроме нуля. Поэтому ее можно выбрать m=9 способами. Вторая цифра может быть любой из множества $\{2,4,6,8,0\}$, ее можно выбрать m = 5 способами. Следовательно, четных двузначных чисел по правилу произведения будет n x m = 45.

Правило произведения является следствием теоремы о мощности прямого произведения конечного числа конечных множеств. В случае произвольного числа объектов оно формулируется следующим образом: Если объект a_1 можно выбрать n_1 способами, объект a_2 - n_2 способами,..., объект a_k - n_k способами, то общее число полученных таким образом упорядоченных наборов $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ можно выбрать $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$ способами.

Если требуется выполнить одновременно k действий, на одно из которых наложено ограничение, то подсчет числа возможных комбинаций удобнее начинать с выполнения именно этого действия.

Пример 9.5. В микроавтобусе 10 мест, одно из которых - место водителя. Сколькими способами могут сесть в автобус 10 человек, если место водителя могут занять только трое из них.

Решение. Начнем с места водителя. Имеется $n_1 = 3$ способа занять его место. Следующее место может занять любой из девяти оставшихся человек, т.е. $n_2 = 9$ и т. д. По правилу произведения получаем всего возможностей

$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_{10} = 3 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3 \times 9!$

Задачи и упражнения

1. Имеется 10 билетов денежно-вещевой лотереи и 15 билетов художественной лотереи. Сколькими способами можно выбрать один лотерейный билет?
2. Сколькими способами можно подарить сувенир из имеющихся 6 авторучек, 7 репродукций картин и 3 альбомов?
3. В городе работают 4 музея, 3 театра и 10 кинотеатров. Сколько вариантов для организации культпохода в воскресенье?
4. Сколько существует вариантов поездки к морю, если туда можно добраться тремя авиарейсами, пятью автодорогами или по железной дороге?
5. В отделе НИИ работают несколько сотрудников, знающих хотя бы один иностранный язык. Из них 6 человек знают английский, 6 - немецкий, 7 - французский, 4 - английский и немецкий, 3 - французский и немецкий, 2 - французский и английский, 1 человек знает все три языка. Сколько человек работает в отделе? Сколько из них знают только английский язык? Сколько человек знают только один язык?
6. Сколько чисел среди первых 100 натуральных чисел не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5?
7. Сколько чисел среди первых 1000 натуральных чисел, не делящихся ни на 3, ни на 4, ни на 5?
8. В корзине лежат 8 различных яблок и 7 различных груш. Сколькими способами можно взять плод из корзины?
9. Сколько существует двузначных чисел в 10-ой системе счисления, в которых нет одинаковых цифр?
10. Сколько существует нечётных трехзначных чисел?

11. На ферме есть 20 овец и 24 козы. Сколькими способами можно выбрать одну овцу и одну козу? Если такой выбор уже сделан, сколькими способами можно сделать его еще раз?
12. Сколькими способами можно выбрать по одному экземпляру каждого учебника, если имеется 3 экземпляра учебника алгебры, 7 экземпляров учебника геометрии и 10 экземпляров учебника информатики?
13. Сколькими способами можно выбрать из натуральных чисел от 1 до 20 два числа так, чтобы их сумма была нечетным числом?
14. Имеется 5 видов конвертов без марок и 4 вида марок. Сколькими способами можно выбрать конверт и марку для посылки письма?
15. Сколькими способами можно выбрать согласную и гласную буквы из слова «здание»? Из слова «кабинет»?
16. В корзине лежат 12 яблок и 10 груш. Сын выбирает из нее яблоко или грушу, после чего дочь берет и яблоко, и грушу. В каком случае дочь имеет большую свободу выбора: если сын взял яблоко или если он взял грушу?
17. Сколькими способами можно совершить круговой рейс из А в В и обратно, если на обратном пути выбирать новую дорогу и известно, что А и В соединены семью дорогами?
18. У некоторых народов принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если ему дают не более трех имен, а их общее число равно 300?

9.2. Понятие выборки. Типы выборок

Пусть $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ - множество, состоящее из конечного числа n элементов. Из различных элементов множества A можно образовать группы. Если в каждую группу входит одно и тоже число m элементов $(m \le n)$, взятых из множества A, то говорят, что они образуют соединения (выборки) из n элементов по m в каждом. В зависимости от того, входят ли в соединение все элементы множества A или часть их, играет ли роль порядок элементов или не играет, различают три вида соединений:

1) размещения;
2) перестановки;

3)сочетания.

Известно, что k-выборка из некоторого множества представляет собой комбинацию из k элементов этого множества. Выборки, в которых все элементы различны, называют *выборками без повторений,* в отличие от *выборок с повторениями,* в которые могут входить одинаковые элементы.

Выборка называется *упорядоченной,* если существенным является не только состав элементов в ней, но и порядок их расположения. Две упорядоченные k-выборки считаются различными, если они отличаются либо составом элементов, либо порядком их расположения. Например, упорядоченные выборки (1,2) и (2,1) считаются различными, хотя и составлены из одних и тех же элементов.

Выборка называется *неупорядоченной,* если порядок следования элементов в ней не существенен. Так, {1,2} и {2,1} считаются одной и той же неупорядоченной выборкой.

Фигурные и круглые скобки подчеркивают отличие неупорядоченной выборки от упорядоченной.

Пример 9.6. Составить всевозможные 2-выборки из элементов множества $M=\{a, b, c\}$.

Решение. $(a,b), (b,a), (a,c), (c,a), (b,c), (c,b)$ - это упорядоченные 2-выборки без повторений. Их, очевидно, всего 6.

$(a,a); (a,b); (a,c); (b,b); (b,a); (b,c); (c,c); (c,a); (c,b)$ - упорядоченные 2-выборки с повторениями. Их всего 9.

$\{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}$ - неупорядоченные выборки без повторений. Легко видеть, что их всего 3.

$[a,b]; [a,a]; [a,c]; [b,b]; [b,c]; [c,c]$ - неупорядоченные выборки с повторениями. Их всего 6.

При решении комбинаторных задач, в которых требуется определить количество некоторых выборок (комбинаций) из данного множества элементов, основным является правильное определение типа (характера) выборок - упорядоченные это выборки или нет, с повторениями или без повторений.

Соединения, каждое из которых содержит m различных элементов $(m \le n)$, взятых из n элементов множества A отличающихся друг от друга или составом элементов или их порядком, называется размещениями из n элементов по m в каждом и обозначаются A_n^m. Например, все различные трехзначные числа, составленные из девяти цифр 1, 2, …, 9 и не содержащие одинаковые цифры образуют размещения, их число A_9^3.

Соединения, в каждое из которых входят n различных элементов множества A и которые отличаются друг от друга только порядком элементов, называется перестановками из n элементов и обозначаются P_n. Перестановки является частным случаем размещений, когда $m=n$. Поэтому $A_n^n = P_n$.

Соединения, каждое из которых содержит m различных элементов ($m \le n$) множества A, отличающиеся друг от друга по крайней мере одним элементом, называется сочетаниями из n элементов по m. Число всех таких сочетаний обозначается C_m^n или $\binom{n}{m}$ Сочетания из n объектов по m – это возможные варианты выбора m различных элементов из n объектов без учета порядка расположения этих элементов. Например, перечислим все сочетания из пяти объектов $\{a,b,c,.d,e\}$ по три: $\{a,b,c\}$; $\{a,b,.d\}$; $\{a,c,.d\}$; $\{a,b,e\}$; $\{a,c,.e\}$; $\{a,d,e\}$; $\{b,c,.d\}$; $\{b,c,.e\}$; $\{b,.d,e\}$; $\{c,.d,e\}$.

Изменение порядка элементов внутри одного сочетания не приводит к новому сочетанию.

9.3 Размещения без повторенийи и размещения с повторениями

Размещениями без повторений из n элементов по k называются упорядоченные k-выборки из n элементов без повторений.

Теорема 9.1. Число всевозможных размещений без повторений из n элементов по m удовлетворяет равенству

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1). \qquad (9.1)$$

Доказательство. Надо выяснить, сколько имеется возможных размещений для n объектов. Существует n способов выбора крайнего объекта слева (первого); после того как этот выбор сделан, существует n–1 способ выбора следующего за ним объекта. Таким образом, получаем $n(n-1)$ способов выбора объектов для первых двух позиций. Аналогично третий объект можно выбрать $n-2$ способами, что в итоге $n(n-1)(n-2)$дает число всевозможных способов выбора первых трех объектов. В общем случае, обозначив через A_n^m количество способов выбора m объектов из n с учетом порядка, получим

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1).$$

Отсюда следует, что общее число размещений выражается формулой (9.1).

Следствие 1. Число всевозможных размещений без повторений из n элементов по m удовлетворяет равенству

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \qquad (9.2)$$

Следствие 2. Полагая в равенстве (9.1) $m = n$, получим

$$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1 = n! \qquad (9.3)$$

Пример 9.7. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеется материал пяти различных цветов?

Решение. Нужно найти число 3-выборок из 5 элементов без повторений (все цвета различны); порядок, в котором располагаются выбранные цвета, существенен. Следовательно, нужно найти число упорядоченных выборок, т.е. число размещений из 5 по 3 без повторений. По формуле (9.3) имеем

$A_5^3 = 5(5-1)(5-2) = 5\times 4\times 3 = 60$ (способов).

Пример 9.8. Та же задача из примера 9.7, но среди полос одна обязательно должна быть красной.

Решение. Красную полосу можно расположить 3-мя способами, т. к. флаг трехполосный. После выбора красной полосы, остался материал 4-х цветов, из которых нужно выбрать два цвета. Этот выбор можно осуществить

$A_4^2 = 4(4-1) = 4\times 3 = 12$ (способами), так как 2-выборки упорядоченные без повторений. По правилу произведения окончательно имеем $3\times A_4^2 = 3\times 12 = 36$ (способов).

Пример 9.9. Сколькими способами можно поставить в ряд 5 человек для фотоснимка?

Решение. Ряд из пяти человек можно рассматривать как упорядоченную выборку из 5-ти элементов по 5. По формуле (9.3) имеем $P_5 = A_5^5 = 5! = 120$ (способов).

Размещениями с повторениями из *n* элементов по k называются упорядоченные k- выборки из *n* элементов с повторениями. Их число обозначается A_k и вычисляется по формуле

$$A_n^k = n^k, k \in N.$$

Пример 9.10. В одной из первых поколений ЭВМ «Стрела» ОЗУ имело 2 048 ячеек, каждая ячейка состояла из 43 разрядов. Какое максимальное количество различных чисел в двоичной системе счисления можно было поместить в ОЗУ?

Решение. В любой ячейке информация (число) представлялась в виде двоичного, т. е. состоящего из 0 и 1, упорядоченного набора длины 43. Всего мест для 0 и 1 равно k = 2 048 × 43 = 88 064. Таким образом, имеем упорядоченные k-выборки из n = 2 с повторениями. Их число находим по формуле:
$A = 2^k$, где k = 88 064.

Задачи и упражнения

1. Из ящика с 70 разными шарами вынимается 5 шаров. Какого типа 5-выборка? Ответ обосновать.
2. Какого типа 8-выборка при совершении покупки восьми пирожных; если в магазине имеется четыре их сорта?
3. На шахматной доске расставлены: а) 8 одинаковых фигур; б) 8 различных фигур. К какому типу относятся 8-выборки в случаях а) и б)?
4. Переставляются буквы слов: а) «март», б) «мама». Сколько получится различных перестановок? Перечислите их. К какому типу выборки можно отнести эти комбинации букв?
5. Из множества цифр {0,1,2,...,9} составляются различные наборы чисел по пять цифр в каждом. Какого типа выборки представляют собой пятизначные числа?
6. Составляются слова длины 4 из 32 букв русского алфавита так, что две соседние буквы этих слов различны. Какого характера эти выборки? Найти число таких наборов слов.
7. Сколько можно составить слов длины k из 32 букв русского алфавита? Рассмотреть случай k = 2, 3, 4.
8. Из множества A = {a, b, c, d} составить:
   а) упорядоченные 2-выборки без повторений;
   б) неупорядоченные 2-выборки без повторений.

Сколько их всего может быть?

9. Составить программу нахождения n!

10. Составить программ у вычисления A_n^m ($m \le n$).

9.4. Перестановки

Важное прикладное значение имеет процесс построения всех перестановок из n объектов методом индукции в предположении, что все перестановки из $n–1$ объектов уже построены. Заменим буквы $\{a,b,c\}$ из п. 9.2 цифрами {1,2,3}, тогда получим следующие перестановки:

1 2 3, 1 3 2, 2 1 3, 2 3 1, 3 1 2, 3 2 1. (9.4)

Как из этого набора получить всевозможные перестановки из четырех цифр {1,2,3,4}?

Существует два основных метода перехода от перестановок из $n–1$ объектов к перестановкам из n объектов.

Метод 1. Для каждой перестановки $a_1a_2a_3...a_{n-1}$ из $\{1,2,3,...,n-1\}$ объектов построим еще n перестановок, помещая число n на все возможные места, в результате чего получим $n,a_1a_2a_3...a_{n-1},\ a_1na_2a_3...a_{n-1},\ldots,a_1a_2a_3...a_{n-1}n$.

Например, для перестановки 231 из (9.4) получим следующее: 4231,2431,2341, 2314. Это всевозможные различные перестановки из n объектов.

Метод 2. Для каждой перестановки $a_1a_2a_3...a_{n-1}$ из $\{1,2,3,...,n-1\}$ объектов построим еще n перестановок следующим образом. Сначала построим набор

$$a_1a_2a_3...a_{n-1}\frac{1}{2},\ a_1a_2a_3...a_{n-1}\frac{3}{2},\ldots,a_1a_2a_3...a_{n-1}\left(n-\frac{1}{2}\right).$$

Затем заменим элементы каждой перестановки цифрами $\{1,2,...,n\}$, сохраняя порядок. Например, для перестановки 2 3 1 из 9.4 получим $231\frac{1}{2}$, $231\frac{3}{2}$, $231\frac{5}{2}$, $231\frac{7}{2}$ и после замены получим 3421, 3412, 2413, 2314.

При таком способе построения тоже очевидно, что каждая перестановка из n элементов встречается только один раз. Аналогичные построения можно выполнить, помещая k не справа, а слева либо в любой другой фиксированной позиции.

Если P_n - число перестановок из n объектов, то описанные методы показывают, что $P_n = nP_{n-1}$; это дает два дополнительных доказательства соотношения (9.3). Величину P_n называют n - факториалом.

Существует приближенная формула вычисления $n!$, которая называется формулой Стирлинга:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \qquad (9.5)$$

где e - основание натурального логарифма.

Однако можно получить точное значение n с помощью разложения на простые множители. Известно, что простое число р является делителем $n!$ кратности

$$\mu = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \cdots = \sum_{k>0} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor. \qquad (9.6)$$

Например, если n=1000 и p=5, то

$$\mu = \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{5^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{5^4} \right\rfloor = 200 + 40 + 8 + 1 = 249.$$

Таким образом, 1000! делится на 5^{249}, но не на 5^{250}. Сумма (9.6) конечна, поскольку начиная с некоторого k, все последующие слагаемые обращаются в нуль. Для упрощения вычислений используется формула

$$\left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor = \left\lfloor \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor / p \right\rfloor, \qquad (9.7)$$

в результате которой надо разделить значение предыдущего члена на p и отбросить остаток. Для нецелых n вместо записи $n!$ используется обозначение

$$n! = \Gamma(n+1) = n\Gamma(n). \qquad (9.8)$$

Функция $\Gamma(x)$ называется гамма – функцией, которая определяется формулой

$$\Gamma(x) = \frac{x!}{x} = \lim_{m\to\infty} \frac{m^x m!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+m)}. \qquad (9.9)$$

Связь между факториалом и гамма - функцией выражается не только формулой (9.8), но и соотношением $(-z)!\Gamma(z)=\dfrac{\pi}{\sin(\pi\cdot z)}$, которое выполняется для всех нецелых z. В дискретной математике часто используются произведения факториального типа – факториальные степени. Для положительного целого k числа $x^{\underline{k}}$ и $x^{\overline{k}}$ определяются следующим образом:

$$x^{\underline{k}}=x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)=\prod_{j=0}^{k-1}(x-j); \tag{9.10}$$

$$x^{\overline{k}}=x(x+1)(x+2)\cdots(x+k-1)=\prod_{j=0}^{k-1}(x+j). \tag{9.11}$$

Числа $x^{\underline{k}}$ и $x^{\overline{k}}$ связаны между собой:

$$x^{\overline{k}}=(x+k-1)^{\underline{k}}=(-1)^k(-x)^{\underline{k}}=\prod_{j=0}^{k-1}(x+j). \tag{9.12}$$

Формулы

$$x^{\underline{k}}=\frac{x!}{(x-k)!}; \qquad x^{\overline{k}}=\frac{\Gamma(x+k)}{\Gamma(x)} \tag{9.13}$$

используются для вычисления факториальных степеней при нецелых значениях k.

9.5. Сочетания без повторений и с повторениями

Сочетаниями без повторений из n элементов по k называются неупорядоченные k-выборки из n элементов без повторений.

Теорема 9.2. Число всех различных сочетаний без повторений из n элементов по m в каждом выражается формулой

$$C_n^m=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}. \tag{9.14}$$

Доказательство. Подсчитаем число всех сочетаний из n объектов по m. Соотношение (9.2) из предыдущего раздела говорит о том, что существует $n(n-1)(n-2)...(n-m+1)$ способов (размещений) выбора первых m объектов в перестановке, причем каждое сочетание из m элементов встречается ровно $m!$ раз. Поэтому справедливо равенство (9.14). Теорема 9.2 доказана.

Число C_n^k, $0 \le k \le n$, равное количеству k-элементных подмножеств n -множества, называется биномиальным коэффициентом. Биномиальные коэффициенты можно поместить в таблицу для случая r=9.

Каждое значение таблицы 9. 1 равно сумме двух значений из предыдущего ряда, причем одно находится в том же столбце, а другое - в ближайшем столбце слева. Не равные нулю биномиальные коэффициенты образуют треугольник, который называется треугольником Паскаля.

Формулу (9.14) можно использовать для определения C_n^k даже в том случае, когда n не является целым числом. Определим число сочетаний C_r^k для всех действительных r и всех целых k следующим образом:

$$C_r^k = \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k(k-1)\cdots 2\cdot 1} = \frac{r^k}{k!} = \prod_{j=1}^{k} \frac{r+1-j}{j},\ k \ge 0;\ C_r^k = 0, k<0. \quad (9.15)$$

Таблица 9.1.

r	C_r^0	C_r^1	C_r^2	C_r^3	C_r^4	C_r^5	C_r^6	C_r^7	C_r^8	C_r^9
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

В таблице 9.1 приведены значения биномиальных коэффициентов для небольших целых величин r и k.

Пример 9.11. Сколькими способами можно выбрать три различные краски из имеющихся пяти?

Решение. Очевидно, что нужно подсчитать число 3-выборок из 5 элементов, причем по условию задачи понятно, что среди выбранных элементов не должно быть одинаковых и что порядок расположения выбранных красок не существенен. Значит, нужно найти число неупорядоченных выборок, т.е. число сочетаний без повторений из 5 по 3. По формуле (9.15) имеем: $C_5^3=\frac{5(5-1)(5-2)}{3!}=10$.

Сочетаниями с повторениями из n элементов по k называются неупорядоченные k-выборки из n элементов с повторениями. Их число обозначается H_n^k и вычисляется по формуле

$$H_n^k=C_{n+k-1}^k=\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!},\forall n,k\in N. \tag{9.16}$$

Пример 9.12. В киоске имеются открытки 10 видов. Сколькими способами можно купить: а) 5 открыток? б) 5 разных открыток? в) 15 открыток с повторениями?

Решение. В случаях а) и в) нас интересуют неупорядоченные выборки из 10 элементов с повторениями длины 5 и 15 соответственно. Их число определяется по формуле (9.16):

а) $H_{10}^5=C_{10+5-1}^5=C_{14}^5=\frac{(14)!}{5!(14-5)!}=\frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{5!}=2002$ (способа).

В случае б) нужно подсчитать число неупорядоченных 5-выборок из 10 элементов без повторений (все открытки разные): $H_{10}^{15}=C_{10+15-1}^{15}=C_{24}^{15}=\frac{(24)!}{(159)!}$ (способа). В случае в) их число определяется по формуле (9.15): $C_{10}^5==\frac{(10)!}{(5)!(5)!}=252$ (способа).

Задачи и упражнения

1. Из 20 студентов надо назначить 5 дежурных. Сколькими способами это можно сделать?
2. Сколькими способами можно составить бригаду из четырёх плотников, если имеются предложения от 10 человек?
3. Сколькими способами пять девушек и трое юношей могут разбиться на две команды по четыре человека в команде, если в каждой команде должно быть хотя бы по одному юноше?
4. Сколькими способами можно расселить 9 студентов в комнаты, каждая из которых рассчитана на трёх человек?
5. Сколькими способами можно составить набор из 8 пирожных, если имеется 4 сорта пирожных?
6. Сколько различных подмножеств из трех элементов имеет множество A={1, 2, 3, 4, 5}; B={*, «,0, 1}?
7. Сколькими способами из трех спортивных обществ, насчитывающих соответственно 40, 40 и 60 человек, можно выбрать команды по 5 человек для участия в соревнованиях?

8. Из группы в 20 человек каждую ночь выделяется наряд из трех человек. Сколько существует вариантов составления наряда?
9. Из группы, состоящей из 7 мужчин и 4 женщин, надо выбрать 6 человек так, чтобы среди них было не менее двух женщин. Сколькими способами это можно сделать?
10. Сколькими способами можно выбрать 12 человек из 17, если данные двое человек из этих 17 не могут быть выбраны вместе?
11. Решить уравнение $C_n^5 = 2C_{n-1}^5$.
12. Составить программу вычисления $C_n^m \quad (m \le n)$.
13. Составить программу вычисления P_n.

9.6. *Свойства сочетаний*

Рассмотрим свойства сочетаний.

1^0. ***Факториальное представление***

$$C_n^{n-r} = \frac{n!}{(r!)(n-r)!}. \tag{9.17}$$

Умножив числитель и знаменатель правой части (9.14) на $(n-m)!$получим

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)(n-r)!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

2^0. Свойство симметрии

$$C_n^r = C_n^{n-r} \tag{9.18}$$

следует из соотношений (9.15) и (9.17). Эта формула справедлива для всех целых r. Если r отрицательно или больше, чем n, то биномиальный коэффициент ранен нулю (при условии, что n - неотрицательное целое число).

3^0. Внесение - вынесение

В силу определения (9.14) для целых $k \neq 0$ имеем

$$C_r^k = \frac{r}{k} C_{r-1}^{k-1}. \tag{9.19}$$

Эта формула применяется для комбинирования биномиального коэффициента с другими частями выражения. Выполнив некоторые преобразования, получим соотношения

$$k \cdot C_r^k = r \cdot C_{r-1}^{k-1}; \quad \frac{1}{r} C_r^k = \frac{1}{k} C_{r-1}^{k-1},$$

первое из которых верно для всех целых k, а второе – если $r \neq 0$ и $k \neq 0$. Докажем, что справедливо равенство

$$C_r^k = \frac{r}{r-k} C_{r-1}^k. \qquad (9.20)$$

Используя поочередно формулы (9.18) и (9.19), получим

$$C_r^k = C_r^{r-k} = \frac{r}{r-k} C_{r-1}^{r-1-k} = \frac{r}{r-k} C_{r-1}^k \quad .$$

Данное доказательство имеет силу только в случае, когда r - положительное целое число $r \neq k$, так как этого требуют ограничения, наложенные на соотношения (9.18) и (9.19). Докажем , что формула (9.20) справедлива для произвольного $r \neq k$.

Формула

$$rC_{r-1}^k = (r-k) C_r^k$$

справедлива для бесконечного множества значений r. Обе части этого равенства являются многочленами от r. Ненулевой многочлен степени n может иметь максимум n различных корней. Поэтому, если два многочлена степени $k \leq n$ совпадают в $n+1$ или более различных точках, то, вычитая их один из другого, получим, что эти многочлены тождественно равны. Этот принцип используется при доказательстве справедливости многих тождеств, верных для целых чисел, для всех действительных чисел.

4^0.Формула сложения. Основное соотношение

$$C_r^k = C_{r-1}^k + C_{r-1}^{k-1} \qquad (9.21)$$

выполняется для таблицы 9.1, каждое значение которой равно сумме двух значений из предыдущего ряда, причем одно находится в том же столбце, а другое - в ближайшем столбце слева и его можно легко вывести из соотношения (9.15). Но есть и другой способ. Из формул (9.18) и (9.19) получаем

$$rC_{r-1}^k + rC_{r-1}^{k-1} = (r-k) C_r^k + kC_r^k = rC_r^k.$$

9.7.Формулы суммирования

Повторное применение формулы (9.21) дает

$$C_r^k = C_{r-1}^k + C_{r-1}^{k-1} = C_{r-1}^k + C_{r-2}^{k-1} + C_{r-2}^{k-2} = \cdots$$

или

$$C_r^k = C_{r-1}^{k-1} + C_{r-1}^k = C_{r-1}^k + C_{r-2}^{k-1} + C_{r-2}^k = \cdots.$$

Полученные формулы суммирования выразим:

$$\sum_{k=0}^{n} C_{r+k}^{k} = C_r^0 + C_{r+1}^1 + \cdots + C_{r+n}^n = C_{r+n+1}^n, \qquad (9.22)$$

где целое $n \geq 0$;

$$\sum_{k=0}^{n} C_k^m = C_0^m + C_1^m + \cdots + C_n^m = C_{n+1}^{m+1}, \qquad (9.23)$$

где целое $n \geq 0$; целое $m \geq 0$. Формулу (9.23) можно доказать индукцией по n, но ее можно вывести из (9.22) в результате применения соотношения (9.18):

$$\sum_{0 \le k \le n} C_k^m = \sum_{0 \le m+k \le n} C_{m+k}^m = \sum_{-m \le k < 0} C_{m+k}^m + \sum_{0 \le k \le n-m} C_{n+k}^k = C_{m+(n-m)+1}^{n-m} = C_{n+1}^{m+1},$$

где целое $n \geq m$; если $n < m$, то (9.22) верно.

Из формулы (9.23) в качестве частного случая при $m=1$ получается формула суммы S_n^1 арифметической прогрессии:

$$C_0^1 + C_1^1 + \cdots + C_n^1 = 0 + 1 + 2 + \cdots + n = C_{n+1}^2 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Принимая во внимание верное равенство $k^2 = 2 \cdot C_k^2 + C_k^1$, получим $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n} \left(2C_k^2 + C_k^1\right) = 2C_{n+1}^3 + C_{n+1}^2$.

Теперь эту формулу запишем в виде многочлена

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = 2\frac{(n+1)n(n-1)}{6} + \frac{(n+1)n}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = S_n^2.$$

Примеры решения задач

1. Решить уравнения

a) $\dfrac{P_{x+2}}{A_x^n \cdot P_{x-n}} = 132$, где $n \in N \wedge n \geq 10$.

Решение. Согласно формулам (9.2), (9.3) имеем

$$\frac{(x+2)!(x-n)!}{x!(x-n)!} = 132 \Leftrightarrow \frac{x!(x+1)(x+2)}{x!} = 132 \Leftrightarrow (x+1)(x+2) = 132 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 3x + 2 = 132 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 130 = 0 \Rightarrow x = 10 \vee x = -13.$$

Принимая во внимание условие задачи, получим, что x=-13 не является решением, а x=10 - решение заданного уравнения.

b) $x^2 \cdot C_{x-1}^{x-4} = A_4^2 \cdot C_{x+1}^3 - x \cdot C_{x-1}^{x-4}$.

Решение. Учитывая, что $A_4^2 = 12$, запишем уравнение в виде $\left(x^2 + x\right)C_{x-1}^{x-4} = 12C_{x-1}^{x-4}$.

Принимая во внимание свойства симметрии (9.18) и внесения-вынесения (9.19), получим

$$\frac{x}{4}C_{x-1}^{3}=\frac{3}{(x+1)}C_{x+1}^{3}\Leftrightarrow C_{x}^{4}=C_{x}^{2}\Leftrightarrow C_{x}^{x-4}=C_{x}^{2}\Rightarrow x=6.$$

c) $\frac{1}{C_4^x}-\frac{1}{C_5^x}=\frac{1}{C_6^x}$ $(x\le 4)$.

Решение. Воспользуемся факториальной формулой (9.17):

$$\frac{x!(4-x)!}{4!}-\frac{(5-x)!x!}{5!}=\frac{x!(6-x)!}{6!}\Leftrightarrow 1-\frac{5-x}{5}=\frac{(5-x)(6-x)!}{5\cdot 6}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 30-30+6x=30-5x-6x+x^2\Leftrightarrow x^2-17x+30=0\Rightarrow x=2\vee x=15.$$

Учитывая условие задачи, получим, что x=15 не является решением, а x=2- решение заданного уравнения.

d) $C_{x+1}^{y+1}:C_{x+1}^{y}:C_{x+1}^{y-1}=5:5:3$

Решение. Данное уравнение сводится к системе двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases}C_{x+1}^{y+1}:C_{x+1}^{y}=1\\ :C_{x+1}^{y}:C_{x+1}^{y-1}=:5:3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_{x+1}^{y+1}=C_{x+1}^{y}\Rightarrow x+1=2y+1\Rightarrow x=2y\\ :3\cdot C_{x+1}^{y}:=5\cdot C_{x+1}^{y-1}\end{cases}.$$

Продолжая далее, получим систему уравнений

$$\begin{cases}\frac{3}{(x-y+1)!\cdot y}=\frac{5!}{(x-y+2)!}\\ x=2y\end{cases}$$, решая которую получим:

$$\begin{cases}\frac{3}{y}=\frac{5!}{x-y+2!}\\ x=2y\end{cases}\Leftrightarrow\frac{3}{y}=\frac{5}{y+2}\Rightarrow y=3\wedge x=6.$$

Ответ:(6,3).

2. Вычислить следующие суммы

a) $S_n=C_n^0+\frac{C_n^1}{2}+\frac{C_n^2}{3}+\ldots+\frac{C_n^n}{n+1}$.

Решение. Воспользуемся формулой (9.19): $\frac{C_n^k}{k+1}=\frac{1}{n+1}C_n^n$.

Подставляя вместо k значения $0,1,2,3,\ldots,n$, получим

$$C_n^0=\frac{C_{n+1}^1}{n+1},\frac{C_n^1}{2}=\frac{C_{n+1}^2}{n+1},\frac{C_n^2}{3}=\frac{C_{n+1}^3}{n+1},...,\frac{C_n^n}{n+1}=\frac{C_{n+1}^{n+1}}{n+1}.$$ Откуда

$$S_n=\frac{1}{n+1}\left(C_{n+1}^1+C_{n+1}^2+C_{n+1}^3+...+C_{n+1}^{n+1}\right)=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

b) $S_n=C_n^0-C_n^1+2C_n^2-3C_n^3+...+(-1)^n\cdot nC_n^n, n=2,3,...,$

Решение. Воспользуемся формулой (9.20): $kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$.

Подставляя вместо k значения $1,2,3,...,n$, получим

$$C_n^1=nC_{n-1}^0,\ 2C_n^2=nC_{n-1}^1, 3C_n^3=nC_{n-1}^2,...,nC_n^n=nC_{n-1}^{n-1}.$$

Откуда имеем:

$$S_n=1-n\left(C_{n-1}^0-C_{n-1}^1+C_{n-1}^2+...+(-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1}\right)=1-n\cdot 0=1.$$

3. Доказать, что при $n>p$ верно равенство:

$$C_n^p=C_{n-1}^{p-1}+C_{n-2}^{p-1}+C_{n-3}^{p-1}+...+C_{p+1}^{p-1}+C_p^{p-1}+C_{p-1}^{p-1}.$$

Доказательство. Воспользуемся формулой (9.21): $C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}$ которая верна для любого $k\in\{0,1,2,3,...,n\}$.

Поэтому

$$C_n^p-C_{n-1}^{p-1}=C_{n-1}^p$$

$$C_{n-1}^p-C_{n-2}^{p-1}=C_{n-2}^p$$

....

$$C_{p+1}^p-C_p^{p-1}=C_p^p$$

$$C_p^p-C_{p-1}^{p-1}=0$$

Складывая теперь левые и правые части полученных равенств, получим, что верно заданное равенство.

9.8. Бином Ньютона

Докажем, что справедлива

Теорема 9.3. Для любого неотрицательного целого числа n справедлива формула

$$(x+a)^n=C_n^0x^na^0+C_n^1x^{n-1}a^1+C_n^2x^{n-2}a^2+\cdots+C_n^nx^0a^n=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^{n-k}a^k. \qquad (9.24)$$

Доказательство. Теорему 9.3 докажем методом математической индукции. Нетрудно показать, что формула (9.24) верна при $n=0,1,2,3$. Предположим, что (9.24) верна для всех неотрицательных целых чисел $k \le n-1$, т.е.

$$(x+a)^{n-1} = C_{n-1}^{0} x^{n-1} a^{0} + C_{n-1}^{1} x^{n-2} a^{1} + C_{n-1}^{2} x^{n-3} a^{2} \cdots + C_{n-1}^{n-1} x^{0} a^{n-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} x^{n-k-1} a^{k}$$

. Докажем, что (9.24) справедлива для следующего неотрицательного целого числа n. Доказательство этого:

$$(x+a)^{n} = (x+a)\cdot(x+a)^{n-1} = (x+a)\cdot(C_{n-1}^{0} x^{n-1} + C_{n-1}^{1} x^{n-2} a + C_{n-1}^{2} x^{n-3} a^{2} + \ldots$$

$$\ldots + C_{n-1}^{n-1} a^{n-1}) = C_{n-1}^{0} x^{n} + C_{n-1}^{0} x^{n-1} a + C_{n-1}^{1} x^{n-1} a + C_{n-1}^{1} x^{n-2} a^{2} + \ldots + C_{n-1}^{n-2} a^{n-2} x^{2} +$$

$$+ C_{n-1}^{n-2} a^{n-1} x + C_{n-1}^{n-1} a^{n-1} x + C_{n-1}^{n-1} a^{n} = C_{n-1}^{0} x^{n} + (C_{n-1}^{0} + C_{n-1}^{1}) x^{n-1} a + (C_{n-1}^{1} + C_{n-1}^{0}) x^{n-2} a^{2} +$$

$$\ldots + (C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1}) a^{n-1} x + C_{n-1}^{n-1} a^{n} = C_{n}^{0} x^{n} + C_{n}^{1} x^{n-1} a + C_{n}^{2} x^{n-2} a^{2} + \ldots + C_{n}^{n} x^{0} a^{n}.$$

Таким образом, формула (9.24) верна для следующего неотрицательного целого числа n. Следовательно, формула (9.24) верна для любого неотрицательного целого числа n.

Записывая разность $x-a$ в виде $x+(-a)$, получим

$$(x-a)^{n} = C_{n}^{0} x^{n} a^{0} - C_{n}^{1} x^{n-1} a + \ldots + (-1)^{k} C_{n}^{k} x^{n-k} a^{k} + \ldots + (-1)^{n} a^{n} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} C_{n}^{k} x^{n-k} a^{k}. \qquad (9.24а)$$

Формула (9.24) или (9.24а) называется формулой бинома Ньютона, правая часть которой называется разложением бинома. Числа $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^k, \ldots, C_n^n$ называются биномиальными коэффициентами.

Отметим, что если n не является неотрицательным целым числом, то сумма в формуле (9.24) становится бесконечной и биномиальная теорема утверждает, что соотношение (9.24) справедливо для всех n, если $|x/a| \le 1$.

Важным является частный случай формулы (9.24) для $a=1$

$$(x+1)^{n} = \sum_{k=0}^{n} C_{n}^{k} x^{n-k}.$$

Обобщением формулы бинома является формула Абеля – тождество по трем переменным x, y, z:

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x(x-kz)^{k-1}(y+kz)^{n-k},$$
где целое $n \geq 0, x \neq 0$.

9.9. Свойства разложения бинома

1^0. Число всех членов разложения на 1 больше показателя бинома.

2^0. Сумма показателей x и a каждого члена разложения (9.23) равна показателю степени бинома.

3^0. Общий член разложения имеет вид

$$T_{k+1} = (-1)^k C_n^k x^{n-k} a^k, \qquad k = 0,1,2,...,n.$$

4^0. Биномиальные коэффициенты членов, равноотстоящих от концов разложения, равны между собой, поскольку

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

5^0. Биномиальный коэффициент $(k+1)$ – го члена разложения связан с биномиальным коэффициентом предыдущего члена соотношением

$$C_n^k = \frac{n-k+1}{k} C_n^{k-1}. \tag{9.25}$$

6^0. Из (9.25) следует, что $C_n^k > C_n^{k-1}$, если $\frac{n-k+1}{k} > 1$, т.е $k < \frac{n+1}{2}$ и $C_n^k < C_n^{k-1}$, если $\frac{n-k+1}{k} < 1$, т.е $k > \frac{n+1}{2}$. Если показатель бинома – число нечетное $(n = 2p+1)$, то биномиальные коэффициенты $C_{2p+1}^0, C_{2p+1}^1, ..., C_{2p+1}^p$ возрастают, а биномиальные коэффициенты $C_{2p+1}^{p+1}, C_{2p+1}^{p+2}, ..., C_{2p+1}^{2p+1}$ убывают. Коэффициенты $C_{2p+1}^p, C_{2p+1}^{p+1}$- наибольшие. Если показатель бинома – число четное $(n = 2p)$, то биномиальные коэффициенты $C_{2p}^0, C_{2p}^1, ..., C_{2p}^p$ возрастают, а биномиальные коэффициенты $C_{2p}^{p+1}, C_{2p}^{p+2}, ..., C_{2p}^{2p}$ убывают. Коэффициент C_{2p}^p - наибольший.

7^0. Сумма всех биномиальных коэффициентов равна 2^n. В самом деле, полагая в (9.24) $x = a = 1$ получим тождество

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k,$$

которое означает, что число всех подмножеств n-множества, включая пустое множество, равно 2^n.

Доказательство свойства 7^0 следует из (9.24)).

8^0.Сумма всех биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов на нечетных местах и равна 2^{n-1}, т.е. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k = 0$

(доказательство следует из (9.24а)).

Задачи и упражнения

1. Доказать следующие свойства биномиальных коэффициентов:

a) $C_n^k = C_n^{n-k}, k = 1,2,...,n$;

b) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k, k = 1,2,...,n$;

c) $C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k} = C_m^k \cdot C_n^m$;

d) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$;

e) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$;

k) $\sum_{k=0}^{n} C_n^{2k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^{2k+1}$.

2. Составить программу вычисления числа размещений с повторениями $\bar{A}_n^k = n^k, k \in N$.

3. Составить программу вычисления числа сочетаний $\bar{C}_n^m$ с повторениями $H_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}, \forall n,k \in N$.

4. Составить программу вычисления числа перестановок с повторениями

$$P(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}.$$

9.10. Основные тождества с биномиальными коэффициентами. Полиномиальная формула

1. Обращение верхнего индекса

Основное тождество

$$C_r^k = (-1)^k C_{k-r-1}^k, \tag{9.26}$$

где k - целое число, непосредственно следует из определения (9.15), если каждый член числителя взять с противоположным знаком и умножить на (-1). Следствием соотношения (9.26) является формула суммирования

$$\sum_{k \le n} C_r^k (-1)^k = C_r^0 - C_r^1 + \cdots + (-1)^n C_r^n = (-1)^n C_{r-1}^n, \tag{9.27}$$

где n - целое число. Для доказательства (9.27) воспользуемся соотношениями (9.26) и (9.22):

$\sum\limits_{k \le n} C_r^k (-1)^k = \sum\limits_{k \le n} C_{r-k-1}^k = C_{-r+n}^n = (-1)^n C_{r-1}^n$. Из формулы (9.26) для целого n положив $r = n$ и $k = n - m$, и воспользовавшись формулой (9.19), получим:

$$C_n^m = (-1)^{n-m} C_{-(m+1)}^{n-m}. \tag{9.28}$$

Таким образом, параметр n переместился из верхней позиции в нижнюю.

2. Упрощение произведений

Произведения биномиальных коэффициентов можно выразить различными способами, расписывая их через факториалы по формуле (9.17) и снова возвращаясь к записи для биномиальных коэффициентов. Докажем формулу

$$C_r^m C_m^k = C_r^k C_{r-k}^{m-k}, \tag{9.29}$$

которая является обобщением (9.17), где m, k - целые числа. Формулу (9.29) достаточно доказать для целого $r \ge m$ и $0 \le k \le m$. Тогда имеем

$$C_r^m C_m^k = \frac{r!m!}{(r-m)!m!k!(m-k)!} = \frac{r!(r-k)!}{k!(r-k)!(r-m)!(m-k)!} = C_r^k C_{r-k}^{m-k}.$$

3. Суммы произведений

Вычисляя коэффициенты при t^r в обеих частях равенства $(1+t)^m = (1+t)^s \cdot (1+t)^{m-s}, 0 \le s \le m$ получим тождество

$$\sum_{k=0}^{m} C_s^k C_{m-s}^{r-k} = C_r^m. \qquad (9.30)$$

Аналогично из равенства $(1+t)^m \cdot (1+t)^m = (1+t)^{2m}$ следует тождество

$$\sum_{k=0}^{m} \left(C_m^k\right)^2 = C_{2m}^m. \qquad (9.31)$$

Рассмотрим формулы, которые показывают, чему равны суммы произведения двух биномиальных коэффициентов при различных положениях индекса суммирования k:

$$\sum_k C_r^k C_s^{n-k} = C_{r+s}^n, \qquad (9.32)$$

где n - целое число;

$$\sum_k C_r^{m+k} C_s^{n+k} = C_{r+s}^{r-m+n}, \qquad (9.33)$$

где n, m - целые числа; целое $r \ge 0$;

$$\sum_k C_r^k C_{s+k}^n (-1)^{r-k} = C_s^{n-r}, \qquad (9.34)$$

где n - целое число; целое $r \ge 0$;

$$\sum_{0 \le k \le r} C_{r-k}^m C_s^{k-t} (-1)^{k-t} = C_{r-t-s}^{r-t-m}, \qquad (9.35)$$

где целое $t \ge 0$; целое $r \ge 0$; целое $m \ge 0$;

$$\sum_{0 \le k \le r} C_{r-k}^m C_n^{s+k} = C_{r+s+1}^{m+n+1}, \qquad (9.36)$$

где целое $n \ge 0$; целое $s \ge 0$; целое $r \ge 0$; целое $m \ge 0$;

$$\sum_{0 \le k} C_{r-t\cdot k}^k C_{s-t(n-k)}^{n-k} = C_{r+s-t\cdot n}^{m+n+1}, \qquad (9.37)$$

где n - целое число.

Пример 9.13. Найти сумму

$\sum_k C_r^k C_s^k k,$ где k - положительное целое число.

Решение. Применяя формулу (9.19), сначала избавимся от k:

$\sum_k C_r^k C_s^k k = \sum_k C_r^k C_{s-1}^{k-1} s = s\sum_k C_r^k C_{s-1}^{k-1} k$. Теперь применим формулу (9.33) при $n=-1$. Тогда получим $\sum_k C_r^k C_s^k k = s \cdot C_{r+s-1}^{r-1}$, целое $r \geq 0$.

Пример 9.14. Найти сумму

$\sum_k C_{n+k}^{2k} C_{2k}^k \frac{(-1)^k}{k+1}$, где n- неотрицательное целое число.

Решение. Применим формулу (9.29):

$$\sum_k C_{n+k}^{2k} C_{2k}^k \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_k C_{n+k}^k C_n^k \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

Теперь применим формулу (9.19), тогда получим

$$\sum_k C_{n+k}^k C_n^k \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_k C_{n+k}^k \frac{(k+1)}{(n+1)} C_{n+1}^{k+1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_k C_{n+k}^k C_{n+1}^{k+1} \frac{(-1)^k}{n+1}. \quad (9.38)$$

Далее преобразования можно продолжить одним из двух способов. Заменим C_{n+k}^k коэффициентом C_{n+k}^n в предположении, что $k \geq 0$ и применим формулу (9.32):

$$\sum_k C_{n+k}^k C_{n+1}^{k+1} \frac{(-1)^k}{n+1} = -\frac{1}{n+1}\sum_{k\geq 1} C_{n-1+k}^n C_{n+1}^k (-1)^k =$$

$$= -\frac{1}{n+1}\sum_{k\geq 1} C_{n-1+k}^n C_{n+1}^k (-1)^k + \frac{1}{n+1} C_{n-1}^n =$$

$$= -\frac{1}{n+1}(-1)^{n+1} C_{n-1}^{-1} + \frac{1}{n+1} C_{n-1}^n = \frac{1}{n+1} C_{n-1}^n.$$

Биномиальный коэффициент $C_{n-1}^n = 0$, кроме случая $n=0$, когда он равен единице. Поэтому решение задачи можно дать в виде $\delta_{n,0}$. Начиная с (9.38) применим формулу (9.34):

$$\sum_k C_{n+k}^k C_n^k \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_k C_{n+k}^k C_{n+1}^{k+1} \frac{(-1)^k}{n+1} = \sum_k C_{-(n+1)}^k C_{n+1}^{k+1} \frac{1}{n+1}.$$

Используя формулу (9.33), получим

$$\sum_k C_{n+k}^k C_n^k \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_k C_{-(n+1)}^k C_{n+1}^{k+1} \frac{1}{n+1} = C_{n+1-(n+1)}^{n+1-1+0} \frac{1}{n+1} = C_0^n \frac{1}{n+1} = \delta_{n,0},$$

где целое $n \geq 0$.

Пример 9.15. Определить значения $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots,$ такие, что

$$n! = a_0 + a_1 n + a_2 n(n-1) + a_3 n(n-1)(n-2) + \ldots, \tag{9.39}$$

Решение. Поскольку, подставляя вместо n последовательно значения $0,1,2,3,\ldots,$ можно получить соответственно значения $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots,$ то данная задача имеет решение. Представим (9.39) с помощью биномиальных коэффициентов:

$$n! = \sum_k C_n^k k! a_k \,. \tag{9.40}$$

Задача решения уравнений, подобных (9.40), относительно a_k называется задачей обращения. Рассмотрим частный случай тождества (9.34) при $s = 0$:

$$\sum_k C_r^k C_k^n \frac{(-1)^{r-k}}{k+1} = C_0^{n-r} = \delta_{nr}, \tag{9.41}$$

где n - целое, целое $r \geq 0$. Формула (9.41) важна потому, что при $n \neq r$ сумма равна нулю; ее применение облегчит решение данной задачи, поскольку многие члены суммы в (9.40) равны нулю. Сложим равенства (9.40) для $n = 0,1,2,3,\ldots,$ умноженные на подходящие коэффициенты

$$\sum_n n! C_m^n a_k (-1)^{m-n} = \sum_n \sum_k C_n^k k! a_k C_m^n (-1)^{m-n} = \sum_k k! a_k \sum_n C_n^k C_m^n (-1)^{m-n} =$$

$$= \sum_k k! a_k \delta_{km} = m! a_m .$$ В результате имеем:

$$a_m = \sum_{n \geq 0} \frac{m!}{n!} C_m^n (-1)^{m-n} = \sum_{0 \leq n \leq m} \frac{(-1)^{m-n}}{(m-n)!} = \sum_{0 \leq n \leq m} \frac{(-1)^n}{(n)!} = m! a_m \,.$$

Задача 9.15 решена.

Рассмотрим теперь смысл формулы (9.41). Для неотрицательных целых чисел имеем:

$$\sum_k C_r^k (-1)^{r-k} \left(b_0 + b_1 k + b_2 k^2 + \ldots + b_r k^r \right) = r! b_r , \tag{9.42}$$

где целое $r \geq 0$; $\left(b_0 + b_1 k + b_2 k^2 + \ldots + b_r k^r \right)$- произвольный многочлен степени не выше r. Из формулы (9.41) можно получить многие другие соотношения, которые кажутся на первый взгляд сложными, например :

$$\sum_k C_r^k C_{s-kt}^r (-1)^{r-k} = t^r r \,.$$

4. Полиномиальная формула

Используя биномиальную формулу (9.24) докажем справедливость следующей формулы

$$(u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n)^m=\sum_{k_1+k_2+k_3+\cdots+k_n=m}\frac{m!}{k_1!\cdot k_2!\cdots k_n!}u_1^{k_1}\cdot u_2^{k_2}\cdots u_n^{k_n},\quad(9.43)$$

где суммирование осуществляется по всевозможным решениям уравнения $k_1+k_2+k_3+\cdots+k_n=m$ в целых неотрицательных числах.

Под решением понимается вектор $(k_1,k_2,k_3,...,k_n)$ с целыми неотрицательными координатами, удовлетворяющими равенству $k_1+k_2+k_3+\cdots+k_n=m$. Формулу (9.43) называют полиномиальной, а выражения $\frac{m!}{k_1!\cdot k_2!\cdots k_n!}$ - полиномиальными коэффициентами. Докажем методом математической индукции. При $n=2$ формула (9.43) верна, так как она совпадает с биномиальной формулой (9.24):

$$(u_1+u_2)^m=\sum_{k=0}^{m}C_m^k u_1^{m-k}u_2^k.\quad(9.44)$$

Применяя формулу (9.23) бинома Ньютона, имеем

$$((u_1+u_2+u_3+\cdots+u_{n-1})+u_n)^m=\sum_{k=0}^{m}C_m^k\frac{m!}{k_1!\cdot k_2!\cdots k_n!}(u_1+u_2+u_3+\cdots+u_{n-1})^k u_n^{m-k}.$$

Используя предположение индукции о справедливости формулы (9.43) для всех показателей $k<m$, получим

$$((u_1+u_2+\cdots+u_{n-1})+u_n)^m=$$

$$=\sum_{k=0}^{m}C_m^k u_n^{m-k}\sum_{k_{11}+k_{223}+\cdots+k_{n-1n}=m}\frac{k!}{k_1!\cdot k_2!\cdots k_n!}u_1^{k_1}\cdot u_2^{k_2}\cdots u_n^{k_{n-1}}.$$

Полагая $k_n=m-k$ и переходя от повторного суммирования к суммированию одновременно по всем индексам, последнее соотношение можно продолжить:

$$(u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n)^m=\sum_{k_1+k_2+k_3+\cdots+k_n=m}\frac{m!}{k_1!\cdot k_2!\cdots k_n!}u_1^{k_1}\cdot u_2^{k_2}\cdots u_n^{k_n}.$$

Полагая в формуле (9.43) $u_1=u_2=u_3=\cdots=u_n=1$, получим тождество

$$n^m = \sum_{k_1+k_2+k_3+\cdots+k_n=m} \frac{m!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}. \qquad (9.45)$$

Рассмотрим n- множество $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ и n- мерный вектор $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ с целыми координатами такими, что $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=m, \alpha_i\ge 1$. Совокупность из m элементов множества X, в котором элемент x_i встречается α_i раз, называется m- мультимножеством первичной спецификации $\left\{x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2},...,x_n^{\alpha_n}\right\}$, порожденным множеством X, которое записывается $\hat{X}=\langle x_1,..x_1;x_2,...,x_2;x_n,...,x_n\rangle$, где x_i повторяется α_i раз, а при $\alpha_i=0$ не встречается вовсе. Числа $\alpha_i, i=1,2,...,n$ называются показателями первичной спецификации m-мультимножества $\hat{X}$. Если среди чисел α_i имеется β_0- нулей, β_1- единиц, β_2- двоек, и т.д. β_m значений m, то символ $[\![0^{\beta_0},1^{\beta_1},...,m^{\beta_m}]\!]; 1\cdot\beta_1+2\cdot\beta_2+\cdots+m\cdot\beta_m=m$, называется вторичной спецификацией m-мультимножества $\hat{X}$, а числа $\beta_1,\beta_2,...,\beta_m$- показателями. Часто m-мультимножество $\hat{X}$, соответствующее n- множеству, называется m- сочетанием с повторениями из n элементов.

Комбинаторный смысл тождества (9.45) состоит в том, что выражение $\frac{m!}{k_1\cdot k_2!\cdots k_n!}$ определяет число векторов с координатами из n- множества, у которых показатели первичной спецификации равны $k_1,k_2,k_3,...,k_n$. Суммирование по всем таким показателям дает число всех m-векторов равное n^m.

Рассмотрим задачу *на перестановки с повторениями*: имеются предметы k различных видов. Сколько различных комбинаций (перестановок) можно сделать из n_1 предметов 1-го вида, n_2 предметов 2-го вида,..., n_k предметов k-го вида? Число предметов в каждой перестановке $n=n_1+n_2+...+n_k$. Такие комбинации называются *перестановками с повторениями.* Их число обозначается $P(n_j,n_2,...,n_k)$ и вычисляется по формуле

$$P(n_1,n_2,...,n_k)=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}. \qquad (9.46)$$

Пример 9.16. Сколькими способами можно расположить в ряд 5 черных, 4 белых и 3 красных фишки?

Решение. Эта задача на перестановки с повторениями. Имеем фишки 3-х различных видов: чёрных $n_1 = 5$, белых $n_2 = 4$ и красных $n_3 = 3$. Всего фишек n = 12. Следовательно, по формуле (9.46) имеем $P(5,4,3)=\frac{12!}{3!\cdot 4!\cdot 5!}=27720$ (способов).

Замечание 1. Для решения данной задачи можно было применить рассуждения, подобные выводу формулы для числа сочетаний: Занумеруем чёрные фишки числами 1, 2, 3, 4, 5; белые - числами 6, 7, 8, 9; красные - числами 10, 11, 12. Имеем всего 12 предметов, которые можно расположить в ряд 12! способами. Но все расположения фишек не меняются при всех перестановках фишек с номерами 1-5 (все они одного вида), с номерами 6-9 и с номерами 10-12. Поэтому число различных расположений *12 !,* равно $\frac{12!}{3!\cdot 4!\cdot 5!} = 27720$.

Замечание 2. Если n_1 = k, $n_2 = n$ - k, то имеем $P(k,n-k)=C_n^k$.

Задача 9.1. Рассмотрим *задачу на циклические перестановки:* семь девушек водят хоровод. Сколькими различными способами они могут встать в круг?

Решение. Если бы девушки стояли на месте, то получилось бы 7! способов перестановок в ряду. Но так как они кружатся, то их положение относительно окружающих предметов не существенно, а важно только их взаимное расположение. Поэтому перестановки, переходящие друг в друга при кружении (циклическом сдвиге), нужно считать одинаковыми. Так как из каждой перестановки циклическим сдвигом можно получить ещё 7 новых, то количество интересующих нас перестановок (7!) : 7 = 6! Эту задачу можно обобщить так.

Если рассматривать перестановки n предметов по кругу, и считать одинаковыми перестановки, переходящие друг в друга при вращении, то число различных перестановок (n-1)!.

Задача 9.2. Рассмотрим *задачу на подсчёт числа беспорядков.* Это так называемая задача «о числе беспорядков». Число *N* перестановок из цифр {1, 2, ..., n} таких, что никакая цифра не остаётся на своём месте, можно найти по следующейформуле:

$$\overline{N}=n!\sum_{i=0}^{n}(-1)^{k}\frac{1}{k!}.$$

Задачи и упражнения

1. Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 коня, 2 слона, 2 ладьи, ферзя и короля) на первой линии шахматной доски?
2. Четыре автора должны написать книгу из 17 глав, причём первый и третий должны написать по 5 глав, второй - 4 главы, а четвёртый - 3 главы книги. Сколькими способами можно распределить главы между авторами?
3. Сколько существует перестановок элементов 1, 2,...,n , в которых элемент 1 находится не на своём месте?
4. Сколько ожерелий можно составить из семи бусинок разных размеров?
5. Сколько различных браслетов можно сделать из четырёх одинаковых рубинов, пяти одинаковых сапфиров и шести одинаковых изумрудов, если в браслете должны быть все 15 камней? Сколькими способами можно из этих камней выбрать три камня для кольца?
6. Сколькими способами можно разбить *(n + m + p)* предметов на три группы так, чтобы в одной было *n,* в другой *m,* а в третьей *p* предметов?
7. Сколькими способами можно переставить буквы в слове

а) «космос?» б) «тартар»?

8. Сколькими способами можно переставить цифры числа

а) 12 341 234? б) 12 345 234?

9. Сколько существует вариантов того, что три человека, сдавшие свои шляпы в гардероб, не получат в точности свою шляпу?

9.11. Полиномиальные коэффициенты. Числа Стирлинга

Главным инструментом выполнения преобразований над суммами, содержащими биномиальные коэффициенты, является использование свойств гипергеометрических функций. Такие функции представляют собой бесконечные суммы, определенные через возрастающие факториальные степени:

$$F\left(\frac{a_1^{\overline{k}},\ldots,a_m^{\overline{k}}}{b_1^{\overline{k}},\ldots,b_m^{\overline{k}}}\middle|z\right)=\sum_{k\geq 0}\frac{a_1^{\overline{k}}\ldots a_m^{\overline{k}}}{b_1^{\overline{k}}\ldots b_m^{\overline{k}}}\frac{z^k}{k!}.$$

Существует несколько важных обобщений понятия биномиальных коэффициентов:

1) в качестве нижнего индекса k в C_n^k может служить произвольное действительное число;

2) существует обобщенная формула

$$\binom{r}{k}_q=\frac{\left(1-q^r\right)\left(1-q^{r-1}\right)\ldots\left(1-q^{r-k+1}\right)}{\left(1-q^k\right)\left(1-q^{k-1}\right)\ldots\left(1-q^1\right)},$$

которая при $q=1$ принимает вид биномиального коэффициента, если перейти к пределу при $q\to 1$. Для этого надо разделить каждый сомножитель числителя и знаменателя на $1-q$. Не менее важным обобщением является полиномиальный коэффициент

$$\binom{k_1+k_2+k_3+\cdots+k_m}{k_1,k_2,\cdots,k_m}=\frac{\left(k_1+k_2+k_3+\cdots+k_m\right)!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}, \text{ целое } k_i\geq 0.$$

Любой полиномиальный коэффициент выражается через биномиальные

$$\binom{k_1+k_2+k_3+\cdots+k_m}{k_1,k_2,\cdots,k_m}=\binom{k_1+k_2}{k_1}\binom{k_1+k_2+k_3}{k_1+k_2}\cdots\binom{k_1+k_2+k_3+\cdots+k_m}{k_1+k_2+\cdots+k_{m-1}},$$

что позволяет применить известные методы.

Коэффициенты в преобразовании многочлена от степенной переменной x в многочлен, выраженный через биномиальные коэффициенты, называются числами Стирлинга; эти числа возникают при изучении самых разнообразных алгоритмов. Числа Стирлинга бывают двух видов. Числа Стирлинга первого рода обозначаются через $\left[{n \atop k}\right]$; это число перестановок n букв с k циклами, а числа Стирлинга второго рода $\left\{{n \atop k}\right\}$ - это число способов разбиения n- множества на k непересекающихся подмножеств. Числа Стирлинга первого рода используются для перехода от факториальных степеней к обычным:

$$x^{\underline{n}}=x(x-1)\ldots(x-n+1)=\begin{bmatrix}n\\0\end{bmatrix}x^{n}-\begin{bmatrix}n\\1\end{bmatrix}x^{n-1}+\ldots+(-1)^{n}\begin{bmatrix}n\\0\end{bmatrix}=\sum_{k}(-1)^{n-k}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}x^{k}\ .(9.46)$$

Таблица 9.2.

n	$\begin{bmatrix}n\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}n\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}n\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}n\\3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}n\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}n\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}n\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}n\\7\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}n\\8\end{bmatrix}$
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0	0	0
3	0	2	3	1	0	0	0	0	0
4	0	6	11	6	1	0	0	0	0
5	0	24	50	35	10	1	0	0	0
6	0	120	274	225	85	15	1	0	0
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1	0
8	0	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1

Например, согласно таблице 9.2 имеем

$$x^{\underline{4}}=\frac{x^{4}}{4!}=\frac{1}{24}\left(x^{4}-6x^{3}+11x^{2}-6x\right).$$

Таблица 9.3.

n	$\begin{bmatrix}n\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}n\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}n\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}n\\3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}n\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}n\\5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}n\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}n\\7\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}n\\8\end{bmatrix}$
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0	0	0
3	0	1	3	1	0	0	0	0	0
4	0	1	7	6	1	0	0	0	0
5	0	1	15	25	10	1	0	0	0
6	0	1	31	90	65	15	1	0	0
7	0	1	63	301	350	140	21	1	0
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1

Числа Стирлинга второго рода используются для перехода от обычных степеней к факториальным:

$$x^{n}=\begin{Bmatrix}n\\0\end{Bmatrix}x^{\underline{n}}+\begin{Bmatrix}n\\1\end{Bmatrix}x^{\underline{n-1}}+\ldots+\begin{Bmatrix}n\\0\end{Bmatrix}x^{\underline{0}}=\sum_{k}\begin{Bmatrix}n\\k\end{Bmatrix}x^{\underline{k}}\,. \qquad (9.47)$$

Например, согласно таблице 9.3 имеем

$$x^4=\left(x^{\underline{4}}+7x^{\underline{3}}+6x^{\underline{2}}+x^{\underline{1}}\right)=4!C_x^4+7\cdot 3!C_x^3+6\cdot 2!C_x^2+C_x^1=$$

$$=24C_x^4+42C_x^3+12C_x^2+C_x^1.$$

В предположении, что m,n - неотрицательные целые числа, рассмотрим основные тождества, содержащие числа Стирлинга.

1. Формулы сложения:

$$\left[{n+1 \atop m}\right]=n\left[{n \atop m}\right]+\left[{n \atop m-1}\right]; \qquad \left\{{n+1 \atop m}\right\}=m\left\{{n \atop m}\right\}+\left\{{n \atop m-1}\right\}.$$

2. Формулы обращения:

$$\sum_k\left[{n \atop k}\right]\cdot\left\{{k \atop m}\right\}(-1)^{n-k}=\delta_{mn}; \qquad \sum_k\left\{{n \atop k}\right\}\cdot\left[{k \atop m}\right](-1)^{n-k}=\delta_{mn}.$$

Частные случаи

$$\binom{0}{n}=\left[{0 \atop n}\right]=\left\{{0 \atop n}\right\}=\delta_{n0}; \quad \binom{n}{n}=\left[{n \atop n}\right]=\left\{{n \atop n}\right\}=1;$$

$$\left[{n \atop n-1}\right]=\left\{{n \atop n-1}\right\}=\binom{n}{2} \tag{9.48}$$

Тождество (9.48) – пример общей закономерности: числа Стирлинга $\left[{n \atop n-1}\right]$ и $\left\{{n \atop n-1}\right\}$ являются многочленами от n степени $2m$.

При $m=2$ и $m=3$ получим формулы:

$$\left[{n \atop n-2}\right]=\binom{n}{4}+2\binom{n+1}{4}, \qquad \left\{{n \atop n-2}\right\}=\binom{n+1}{4}+2\binom{n}{4};$$

$$\left[{n \atop n-3}\right]=\binom{n}{6}+8\binom{n+1}{6}+6\binom{n+2}{6},$$

$$\left\{{n \atop n-3}\right\}=\binom{n+2}{6}+8\binom{n+1}{6}+6\binom{n}{6};$$

$$\left[{n+1 \atop 0}\right]=\left\{{n+1 \atop 0}\right\}=0; \; \left[{n+1 \atop 1}\right]=n!, \left\{{n+1 \atop 1}\right\}=1; \left\{{n+1 \atop 2}\right\}=2^n-1.$$

3. Формулы разложения:

$$\sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \cdot \binom{k}{m} = \begin{bmatrix} n+1 \\ m+1 \end{bmatrix}, \qquad \sum_k \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} \cdot \binom{k}{m} (-1)^{k-m} = \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}; \quad (9.49)$$

$$\sum_k \begin{Bmatrix} k \\ m \end{Bmatrix} \cdot \binom{n}{k} = \begin{Bmatrix} n+1 \\ m+1 \end{Bmatrix}, \qquad \sum_k \begin{Bmatrix} k+1 \\ m+1 \end{Bmatrix} \cdot \binom{n}{k} (-1)^{n-k} = \binom{n}{m}; \quad (9.50)$$

$$\sum_k \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^n = m! \begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix}; \quad (9.51)$$

$$\sum_k \binom{m-n}{m+k} \cdot \binom{m+n}{n+k} \begin{Bmatrix} m+k \\ k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-m \end{bmatrix}, \quad (9.52)$$

$$\sum_k \binom{m-n}{m+k} \cdot \binom{m+n}{n+k} \begin{bmatrix} m+k \\ k \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} n \\ n-m \end{Bmatrix};$$

$$\sum_k \begin{Bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} (-1)^{k-m} = \binom{n}{m}; \quad (9.53)$$

$$\sum_{k \le n} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} \cdot \frac{n!}{k!} = \begin{bmatrix} n+1 \\ m+1 \end{bmatrix}, \qquad \sum_{k \le n} \begin{Bmatrix} k \\ m \end{Bmatrix} \cdot (m+1)^{n-k} = \begin{Bmatrix} n+1 \\ m+1 \end{Bmatrix}. \quad (9.54)$$

Переходя на случай произвольных действительных чисел r, получим связь между числами Стирлинга двух родов - закон двойственности:

$$\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -m \\ -n \end{bmatrix}. \quad (9.55)$$

Соотношение (9.47) остается справедливым в том смысле, что бесконечные ряды

$$z^r = \sum_k \begin{Bmatrix} r \\ r-k \end{Bmatrix} z^{r-k}$$

сходятся, когда действительная часть z положительна. Соотношение (9.47) обобщается на случай асимптотических (но не сходящихся) рядов:

$$z^r = \sum_k \begin{bmatrix} r \\ r-k \end{bmatrix} (-1)^k z^{r-k} + \hat{I}\left(z^{r-m-1}\right).$$

10. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ. СУММЫ И РЕКУРРЕНТНОСТИ

10.1. Рекуррентные соотношения

Если каждому натуральному числу n отнесено по некоторому закону число a_n, то говорят, что задана числовая последовательность

$$a_1, a_2, ..., a_n. \tag{10.1}$$

Числа $a_i, i=1,2,...,n$ называются членами последовательности (10.1). В некоторых случаях последовательность задаётся формулой его общего члена

$$a_n = f(n), n=1,2,3,..., \tag{10.2}$$

Зная её можно получить любой член последовательности (10.1). Для этого достаточно в правую часть (10.2) вместо n подставить номер искомого члена. Например,

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...,$$

Иногда последовательность задаётся так называемым рекуррентным соотношением, т.е. формулой, позволяющей находить члены последовательности по известным предыдущим.

Пример 10.1.

$a_{n+1} = 2a_n + n,\ a_1 = 1.$

Придавая n значения 1,2,,…, получим:

$a_2 = 2a_1 + 1 = 3,$

$a_3 = 2a_2 + 2 = 8,$

$a_4 = 2a_3 + 3 = 19$ и т.д.

Не всякую последовательность можно задать формулой n-го члена или рекуррентным соотношением. Например, её нельзя указать для последовательности простых чисел

1,2,3,5,7,11,13,…

Если это было бы возможным, то были бы решены многие проблемы в науке и практической жизни. В теории простых чисел одно из важных мест занимает задача факторизации числа. Когда Р. Фейнман впервые обратил внимание на возможность построения процессора, работающего по квантово-механическим принципам, не было понятно, в решении каких математических проблем такой компьютер может дать преимущество по сравнению с обычными процессорами? Первый реалистичный пример был найден в 1994 г. П. Шором - задача факторизации большого n- значного числа. В качестве пояснения: задача вычисления произведения двух простых чисел, скажем 521 и 809, не вызывает никаких затруднений. Однако обратная задача: нахождение простых сомножителей числа 421489, потребует определенного времени.

Известно, что это время (при использовании известных теперь классических алгоритмов) растет с ростом длины n факторизуемого числа, как $\exp n$. Достижение Шора состоит в том, что он нашел алгоритм, основанный на особенности квантовых вычислений, уменьшающий рост этого времени до полиномиального n^2. Отметим, что задача факторизации относится к классу математических задач, в которых решение сводится к поиску среди экспоненциально большого класса кандидатов.

Алгоритм решения задачи факторизации опирается на сводимость ее к нахождению периода вспомогательной функции. Такой функцией является остаток от деления степенной функции a^x на целое число N: $f_N(x) = a^x \bmod N$.

Пример 10.2. Пусть a=11, N=15 значения функции $f_N(x)$ при x = 0,1,2,3 равны соответственно 1, 11, 1, 11, т.е. период функции $11^x \bmod 15$ равен 2. Далее процедура нахождения простых делителей в этом примере сводится к следующим операциям 11 ± 1 = 10, 12; 15 - 10 = 5; 15 - 12 = 3.

10.2. Суммируемые последовательности. Способы решения

Пусть даны числа $a_1, a_2, ..., a_n$. Как найти сумму $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$? Эта задача в общем случае не всегда может иметь решение. В тех случаях, когда эта задача имеет решение, процесс его нахождения может оказаться сложным. Рассмотрим некоторые задачи и методы их решений.

1. Сведение к известным суммам

Под известными суммами будем понимать суммы прогрессий и суммы равных степеней первых n натуральных чисел:

$S_n^p = 1^p + 2^p + ... + n^p$, $p = 1, 2, 3, 4, ...$,

a. Найдем сначала значение S_n^1. Слагаемые суммы $S_n^1 = 1 + 2 + 3 + ... + n$ представляют собой арифметическую прогрессию, разность которой $d = 1$.

Поэтому $S_n^1 = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} . n = \frac{n(n+1)}{2}$.

b. Найдём теперь значение S_n^2. Подставляя в тождество $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$ последовательно значения $k = 0, 1, 2, ..., n$, получим

$(0+1)^3 = 1$

$(1+1)^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$

$+ (2+1)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$

$(3+1)^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1$

…………………………...

$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$

Складывая левые и правые части этих равенств, получим

$(n+1)^3 = 3S_n^2 + 3S_n^1 + (n+1)$. Подставляя вместо S_n^1 ее значение, найдем

$$S_n^2 = \frac{1}{3}\left[(n+1)^3 - \frac{3n(n+1)}{2} - (n+1)\right] = \frac{1}{3}(n+1)\left[(n+1)^2 - \frac{3n-1}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)\left[2n^2 + 4n + 2 - 3n - 2\right] = \frac{1}{6}(n+1)\left[2n^2 + n\right] = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

c. Сумму S_n^3 вычислим аналогично, подставив в тождество

$(k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$

последовательно значения $k=0,1,2,...,n$. Складывая левые и правые части полученных равенств, имеем:
$(n+1)^4=4S_n^3+6S_n^2+4S_n^1+(n+1)$. Подставляя теперь

вместо S_n^1 и S_n^2 их значения, вычислим:

$$S_n^3=\frac{1}{4}\left[(n+1)^4-\frac{6n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{4n(n+1)}{2}-(n+1)\right]=$$

$$=\frac{1}{4}(n+1)\left[(n+1)^3-n(2n+1)-2n-1\right]=\frac{1}{4}(n+1)\left[n^2+n\right]=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

2. *Применение метода математической индукции*

И

3. *Представление членов последовательности в виде алгебраической суммы отдельных слагаемых*

Этот метод также рассмотрим на примерах.

Пример 10.3. Найти сумму $S_n=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

Решение. Каждое слагаемое $\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ представим в виде алгебраической суммы трех дробей:

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{A}{k}+\frac{B}{k+1}+\frac{C}{k+2}, \qquad (*)$$

где коэффициенты A,B,C нужно подобрать так, чтобы равенство было справедливым для любого натурального числа k :

$$\frac{A}{k}+\frac{B}{k+1}+\frac{C}{k+2}=\frac{A(k+1)(k+2)+B(k+2)k+C(k+1)k}{k(k+1)(k+2)}=$$

$$=\frac{Ak^2+2Ak+Bk^2+2Bk+Ck^2+Ck+2A+Ak}{k(k+1)(k+2)}.$$ Из равенства дробей с равными знаменателями следует равенство их числителей. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях k, получим

$\begin{cases}A+B+C=0\\3A+2B+C=0;2A=1\end{cases}$. Откуда находим: $A=\frac{1}{2};B=-1;C=\frac{1}{2}$.

Подставляя полученные значения A,B,C в (*) получим

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2k}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2(k+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right], \qquad (**)$$

справедливое для любого натурального числа k. Подставляя в левую часть тождества (**) последовательно значения $k=1,2,...,n$ можно продолжить:

$$S_n=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{2}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}\right)+...+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)=\frac{n(n+1)}{4(n+1)(n+2)}.$$

10.3. Операции над суммами

Пусть $a_1,a_2,...,a_n,...,$ - произвольная последовательность чисел. Сумму вида $S_n=a_1+a_2+...+a_n$ можно записать более компактно:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \quad \text{или} \quad \sum_{1\le j\le n} a_j . \qquad (10.3)$$

Если $n=0$, то по определению значение суммы $S_n=0$. Если $R(j)$ - любое соотношение, зависящее от j, то сумма

$$\sum_{R(j)} a_j . \qquad (10.4)$$

есть сумма всех a_j, где j - целое число, удовлетворяющее условию $R(j)$. Если нет целых чисел, удовлетворяющих условию $R(j)$, то значение суммы (10.4) по определению принимается равным нулю. Переменная j в (10.3) и (10.4) называется немым индексом (или индексной переменной), который вводится для удобства записи. Запись (10.4) используется в случае, когда сумма конечна, т.е. когда конечное число значений j удовлетворяет условию $R(j)$ и $a_j\neq 0$. Чтобы найти бесконечную сумму $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j = \sum\limits_{j\ge 1} a_j = a_1+a_2+...$, которая содержит бесконечно много ненулевых слагаемых, надо применить методы вычислений. Для этого сумму (10.4) необходимо представить в виде:

$$\sum_{R(j)} a_j = \lim_{n\to\infty} \sum_{R(j):0\le j\le n} a_j + \lim_{n\to\infty} \sum_{R(j):-n\le j\le -1} a_j \qquad (10.5)$$

при условии, что оба предела существуют, поскольку в этом случае сумма является сходящейся. В противном случае бесконечная сумма расходится и ее нельзя вычислить. Если под знаком суммы содержатся несколько условий, то они должны выполняться одновременно. Рассмотрим простые алгебраические операции над суммами.

а). Распределительный закон для произведения сумм

$$\left(\sum_{R(i)} a_i\right)\cdot\left(\sum_{S(j)} b_j\right) = \sum_{R(i)}\left(\sum_{S(j)} a_i b_j\right) \qquad (10.6)$$

Например,

$$\left(\sum_{i=1}^{2} a_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{3} b_j\right) = \left(a_1+a_2\right)\cdot\left(b_1+b_2+b_3\right) =$$

$$=\left(a_1b_1+a_1b_2+a_1b_3\right)+\left(a_2b_1+a_2b_2+a_2b_3\right) = \sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{l=1}^{3} a_i b_j\right).$$ Обычно скобки в правой части (10.6) опускают.

b). Замена индекса

$$\sum_{R(i)} a_i = \sum_{R(j)} a_j = \sum_{R(p(j))} a_{p(j)}. \qquad (10.7)$$

В равенстве (10.7) представлены два вида преобразований. В первом случае индекс i заменяется на индекс j. Во втором случае $p(j)$- это функция от j, задающая некоторую перестановку в области суммирования – для каждого целого значения i, удовлетворяющего условию $R(i)$, должно существовать единственное целое число j, удовлетворяющее равенству $p(j)=i$. Данное условие выполняется в следующих случаях: $p(j)=c+j$; $p(j)=c-j$, где c - целое число, не зависящее от j. Например,

$$\sum_{1\le j\le n} a_i = \sum_{1\le j-1\le n} a_j = \sum_{2\le j\le n+1} a_{j-1}. \qquad (10.8)$$

Отметим, что достаточным условием справедливости (10.7) для любой перестановки $p(j)$ целых чисел является сходимость суммы $\sum_{R(j)} \left| a_j \right|$.

c). Изменение порядка суммирования

$$\sum_{R(i)} \sum_{S(j)} a_{ij} = \sum_{S(j)} \sum_{R(i)} a_{ij}. \qquad (10.9)$$

Например,

$$\sum_{R(i)} \sum_{j=1}^{2} a_{ij} = \sum_{R(i)} \left(a_{i1} + a_{i2} \right); \quad \sum_{j=1}^{2} \sum_{R(i)} a_{ij} = \sum_{R(i)} a_{i1} + \sum_{R(i)} a_{i2}.$$

Согласно (10.9) правые части данных соотношений равны:

$$\sum_{R(i)} (b_i + c_i) = \sum_{R(i)} b_i + \sum_{R(i)} c_i, \text{ где } b_i = a_{i1}, c_i = a_{i2}. \qquad (10.10)$$

Операция изменения порядка суммирования применяется в тех случаях, когда простое выражение для суммы $\sum_{R(i)} a_{ij}$ известно, а для суммы $\sum_{S(j)} a_{ij}$ - нет. Необходимость изменения порядка суммирования возникает и в более общем случае, когда соотношение $S(j)$ зависит от каждой из индексных переменных i, j. В этом случае его можно обозначить через $S(i, j)$. Изменение порядка суммирования всегда можно выполнить следующим образом:

$$\sum_{R(i)} \sum_{S(i,j)} a_{ij} = \sum_{S'(j)} \sum_{R'(i)} a_{ij}, \qquad (10.11)$$

где условие $S'(j)$ означает, что существует целое число i, такое, что верно как $R(i)$ так и $S(i, j)$, а условие $R'(i, j)$ означает, что верны как $R(i)$ так и $S(i, j)$. Например, если требуется вычислить сумму $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$, то условие $S'(j)$- условие существования целого числа i: $1 \le i \le n$ и $1 \le j \le i$, т.е. $1 \le j \le n$ а условие $R'(i, j)$ преобразуется в условие $1 \le i \le n$ и $1 \le j \le i$, т.е. $j \le i \le n$. Тогда получим

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} a_{ij}. \qquad (10.12)$$

Отметим, что операция изменения порядка суммирования не всегда справедлива для бесконечных рядов. Если ряд $\sum\limits_{R(i)}\sum\limits_{S(j)} a_{ij}$ абсолютно сходится, то равенства (10.9) и (10.11) верны. Если одно из условий $R(i)$ и $S(j)$ определяют конечную сумму в (10.9) и каждая бесконечная сумма сходится, то операция с) также имеет силу. В частности, для сходящихся бесконечных сумм (10.10) выполняется всегда.

d). Манипуляции с областью суммирования

Если $R(j)$ и $S(j)$ - произвольные соотношения, то

$$\sum_{R(j)} a_j + \sum_{S(j)} a_j = \sum_{R(j)\vee S(j)} a_j + \sum_{R(j)\wedge S(j)} a_j . \qquad (10.13)$$

Например, если $1 \le m \le n$, то

$$\sum_{1\le j\le m} a_j + \sum_{m\le j\le n} a_j = \left(\sum_{1\le j\le n} a_j\right) + a_m, \qquad (10.14)$$

где область, определенная условием $R(j) \wedge S(j)$, в этом случае определяется условием $j = m$, поэтому вторая сумма свелась только к одному слагаемому a_m. В большинстве случаев равенства (10.14) или условия $R(j)$ и $S(j)$ одновременно выполняются только для одного или двух значений j или не существует таких j, для которых верны одновременно $R(j)$ и $S(j)$.

Пример 10.4. Выполним последовательно правила (d) и (b):

$$\sum_{0\le j\le n} a_j = \sum_{\substack{0\le j\le n\\ j-чет}} a_j + \sum_{\substack{0\le j\le n\\ j-нечет}} a_j = \sum_{\substack{0\le 2j\le n\\ 2j-чет}} a_{2j} + \sum_{\substack{0\le 2j+1\le n\\ 2j+1-нечет}} a_{2j+1} =$$

$$= \sum_{0\le j\le n\backslash 2} a_{2j} + \sum_{0\le j< n\backslash 2} a_{2j+1}$$

Пример 10.5. Выполним последовательно правила (c) и (b):

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} a_{iij} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_i a_j = \sum_{j=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_i a_j .$$

В последней сумме выполнена замена i на j и использовалось равенство $a_j a_i = a_i a_j$. Обозначив последнюю сумму через S_2, и последовательно выполняя правила (10.10) (d), (10.10) (a) и (b) продолжим:

$$2S_1 = S_1 + S_2 = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} a_{iij} = \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{i} a_i a_j + \sum_{j=i}^{n} a_i a_j\right) =$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n} a_i a_j\right) + a_i a_i\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} a_i a_j + \sum_{j=0}^{n} a_i a_i = \left(\sum_{j=0}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} a_j\right) + \left(\sum_{i=0}^{n} a_i^2\right) = \left(\sum_{j=0}^{n} a_i\right)^2 + \left(\sum_{i=0}^{n} a_i^2\right)$$

.

Таким образом, получили тождество:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} a_{iij} = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{j=0}^{n} a_i\right)^2 + \left(\sum_{i=0}^{n} a_i^2\right)\right). \qquad (10.15)$$

Пример 10.6. ***(Сумма геометрической прогрессии)***

Пусть $x \neq 1, n \geq 0$. Тогда последовательно выполняя правила (10.4) (d), (a) ,(b) и (d), получим

$$a + ax + \ldots + ax^n = \sum_{0 \leq j \leq n} ax^j = a + \sum_{0 \leq j \leq n} ax^j = a + x \sum_{0 \leq j \leq n} ax^{j-1} =$$

$= a + x \sum_{0 \leq j \leq n-1} ax^j = a + x \sum_{0 \leq j \leq n} ax^j - ax^{n+1}$. Сравнивая первое и последнее выражения, получим формулу:

$$\sum_{0 \leq j \leq n} ax^j = a\left(\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}\right). \qquad (10.16)$$

Пример 10.7. ***(Сумма арифметической прогрессии)***

Пусть $n \geq 0$. Тогда последовательно выполняя правила (10.4) (b), (10.10), получим

$$a + (a+b) + \ldots + (a+nb) = \sum_{0 \leq j \leq n} (a+bj) = \sum_{0 \leq n-j \leq n} (a + b(n-j)) =$$

$$= \sum_{0 \leq j \leq n} (a + bn - bj) = \sum_{0 \leq j \leq n} (2a + bn) - \sum_{0 \leq j \leq n} (a+bj) =$$

$= (n+1)(2a+bn) - \sum_{0 \leq j \leq n} (a+bj)$. Приравнивая первое и последнее выражения, получим формулу для суммы: $\sum_{0 \leq j \leq n} (a+bj) = (n+1)\left(a + \frac{1}{2}bn\right)$.

11. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ РЕКУРРЕНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ

11.1. Сумма бесконечной геометрической прогрессии

Пусть дана бесконечная геометрическая прогрессия

$$a, aq, aq^2, ..., aq,^{n-1} .... \tag{11.1}$$

Исследуем на сходимость ряд

$$a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} = \sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1}. \tag{11.2}$$

Известно, что для ряда (11.2) сумма S_n первых n ее членов определяется формулой

$$S_n = \frac{a\left(1-q^n\right)}{1-q}. \tag{11.3}$$

Рассмотрим случаи.

1. Если $|q|<1$, то выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a\left(1-q^n\right)}{1-q} = \frac{a}{1-q}$. Следовательно, последовательность (11.1) сходится и ее сумма $S == \frac{a}{1-q}$.

2. Если $|q|>1$, то выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} |q|^n = +\infty$ и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a\left(1-q^n\right)}{1-q} = +\infty$. В этом случае последова-

тельность частичных сумм ряда (10.2) не имеет конечного предела, т.е. ряд (11.2) расходится.

3. Если $q=1$, то ряд (11.2) расходится. Действительно, в этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} na = \infty$.

4. Если $q=-1$, то ряд (11.2) также расходится, поскольку последовательность его частичных сумм имеет вид:
$a,0,a,0,a,\ldots,$ где
$S_{2n} = -a+a-a+\ldots+a=0$, $S_{2n+1} = a-a+a-a+\ldots+a=a$ и расходится.

11.2. Метод производящих функции

Рассмотрим ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \varphi_i(x), \tag{11.4}$$

который в случае, когда последовательность $\{a_i\}$ конечна, т.е. $0 \le i \le n$, представляет собой многочлен. При определенных ограничениях ряд (11.4) будет сходящимся и тогда он в некоторой области задает некоторую функцию

$$F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \varphi_i(x). \tag{11.5}$$

Функция $F(x)$ называется производящей функцией последовательности $\{a_i\}$. Пусть $a_i = C^i{}_n$, $0 \le i \le n$, $\varphi_i(x) = x^i$. В этом случае имеем $(1+x)^n = \sum\limits_{i=0}^{\infty} C_n^i x^i$. Следовательно, производящей функцией последовательности $\{C^i{}_n\}$ $,i=1,2,\ldots,$ является функция $F(x) = (1+x)^n$ - бином Ньютона.

В каждом случае, когда функция разлагается в степенной ряд, получаем функцию для некоторой последовательности. Поэтому приведем самые важные случаи разложения в степенной ряд.

1. Биномиальная теорема

$$(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2}x^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} C_n^k x^k. \tag{11.6}$$

Если r – неотрицательное целое число, то получим частный случай:

$$\frac{1}{(1-z)^r}(1+z)^r = \sum_{k\ge 0} C^k_{-n-1}(-z)^k = \sum_{k\ge 0} C^n_{n+k} z^k. \qquad (11.7)$$

Существует также обобщенная формула:

$$z^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2}z^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} C^k_{r-kt}\frac{r}{r-kt}x^k, \qquad (11.8)$$

где x - непрерывная от z функция, которая является решением уравнения $x^{t+1} = x^t + z$, где $x=1$ при $z=0$.

2. Экспоненциальный ряд

$$\exp z = e^z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \ldots = \sum_{k\ge 0}\frac{1}{k!}z^k.$$

В общем случае имеем формулу, содержащую числа Стирлинга:

$$\left(e^z - 1\right)^n = z^n + \frac{1}{n+1}\left\{\begin{matrix} n+1 \\ n \end{matrix}\right\} z^{n+1} + \ldots = \sum_k \left\{\begin{matrix} k \\ n \end{matrix}\right\}\frac{1}{k!}z^k.$$

3. Логарифмический ряд

$$\ln(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \ldots = \sum_{k\ge 1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}z^k.$$

Обобщенная формула содержит числа Стирлинга:

$$\ln\left(\frac{1}{1-z}\right)^n = z^n + \frac{1}{n+1}\begin{bmatrix} n+1 \\ n \end{bmatrix} z^{n+1} + \ldots = n!\sum_k \begin{bmatrix} k \\ n \end{bmatrix}\frac{1}{k!}z^k.$$

Пример 11.1. Найти экспоненциальную производящую функцию $F(x)$ последовательности $f(n)$ через функцию последовательности $f(n)$, если: $f(n) = f(n+1) - f(n), n = 0,1,2,\ldots$

Решение.

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(f(n+1) - f(n)\right)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} f(n+1)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n = \frac{f^{\bullet}(n+1) - f(0)}{x} - f^{\bullet}(x) =$$

$$= \frac{(1-x)f^{\bullet}(x) - f(0)}{x}.$$

Пример 11.2. Найти производящие функции следующих последовательностей:

a) $f(n)=\begin{cases} n+1, n=0,1,2,\ldots,N, \\ 0, n\geq N+1. \end{cases}$ b) $f(n)=n^2, n=0,1,2,\ldots,$

Решение.

$$a) F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{n=0}^{N+1}x^n\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1-x^{N+2}}{1-x}\right), \text{ при } |x|<1.$$

$$b) F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^n=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}nx^n=x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)+x\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)=$$

$$=x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{1-x}\right)+x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{2x^2}{(1-x)^3}+\frac{x}{(1-x)^2}=\frac{x(x+1)}{(1-x)^3}, \text{ при } |x|<1.$$

11.3. Числа Фибоначчи. Формула Бине

Числа f_n, последовательность $\{f_n\}$ $,n=1,2,\ldots$ которых задается рекуррентным соотношением $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$, где $f_0=f_1=1$, называются числами Фибоначчи. Числа Фибоначчи, введенные Леонардом Пизанским (1540г.), входят в описания некоторых процессов, происходящих в природе, например:

1) процесса воспроизводства населения, число f_n при этом является количеством людей в момент времени n;

2) в описании некоторых областей математики, в частности, в доказательстве неразрешимости десятой проблемы Гильберта о решении диофантовых уравнений.

Рассмотрим последовательность $\varphi_i(x)=x^n$ $,n=1,2,\ldots$. С этой последовательностью связан ряд $\sum_{n=0}^{\infty}f_nx^n$, который в силу $f_n<2^n$(поскольку $f_n<2f_{n-1}$), сходится при $|x|<\frac{1}{2}$ и определяет производящую функцию

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_nx^n. \tag{11.9}$$

Поскольку

$$xF(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_{n-1}x^n, \tag{11.10}$$

$$x^2F(x)=\sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2}x^n, \qquad (11.11)$$

то, суммируя (11.10) и (11.11), получим

$$xF(x)+x^2F(x)=\sum_{n=2}^{\infty} f_n x^n+\sum_{n=1}^{\infty} f_{n-1}x^n=\sum_{n=2}^{\infty}\left(f_{n-1}+f_{n-2}\right)x^n+f_0x+f_0x^0-f_0x^0=$$

$=F(x)-1$. Таким образом, имеем $F(x)\left(1-x-x^2\right)=1$, откуда

$$F(x)=\frac{1}{1-x-x^2}. \qquad (11.12)$$

Найдем разложение правой части (11.12) на элементарные дроби

$$F(x)=\frac{1}{1-x-x^2}=\frac{a}{(x_1-x)}+\frac{b}{(x_2-x)}, \qquad (11.13)$$

где

$x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ - корни квадратного трехчлена $1-x-x^2$, для которых выполняются условия

$$x_1\cdot x_2=-1, \quad x_1+x_2=-1. \qquad (11.14)$$

Равенство (11.13) с учетом (11.14) продолжим $-1=ax_2-ax+bx_1-bx$, откуда получим

$$ax_2+bx_1-(a+b)x=-1. \qquad (11.15)$$

Уравнение (11.15) имеет смысл, только в том случае, когда верно равенство

$$a+b=0. \qquad (11.16)$$

Из равенства (11.15) с учетом (11.16) находим $a=-b, b=-1/(x_1-x_2)=-\frac{1}{\sqrt{5}}$. Принимая во внимание последние соотношения, и воспользовавшись формулой для суммы убывающей геометрической прогрессии (при $\left|x/x_1\right|<1, \left|x/x_2\right|<1$), (11.13) можно продолжить

$$F(x)=\frac{1}{1-x-x^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x_1-x}-\frac{1}{x_2-x}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{x_1\left(1-\frac{x}{x_1}\right)}-\frac{1}{x_2\left(1-\frac{x}{x_2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x_1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x_1}\right)^n-\frac{1}{x_2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x_2}\right)^n\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x_2^{n+1}-x_1^{n+1}}{(x_1x_2)^{n+1}}x^n=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left((-x_2)^{n+1}-(-x_1)^{n+1}\right)x^n=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{\grave{o}=0}^{\infty}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}x^n\right). \qquad (11.17)$$

Сравнивая равенство (11.17) с (11.9), получим

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]. \qquad (11.18)$$

Формула (11.18) называется формулой Бине и является явным выражением для чисел Фибоначчи.

Задачи и упражнения

1. Последовательность Фибоначчи задается следующим рекуррентным соотношением: *F(n + 2) = F(n +1) + F(n)* и начальными условиями *F(1)= F(2) = 1*. Найти общий член этой последовательности. Выписать первые 10 чисел Фибоначчи.

2. Найти производящие функции следующих последовательностей:

2.1. $f(n)=\begin{cases}1, n=0,1,2,\ldots,N,\\ 0, n>N.\end{cases}$

2.2. $f(n)=\begin{cases}n+1, n=0,1,2,\ldots,N,\\ 0, n\geq N+1.\end{cases}$

2.3. $f(n)=\begin{cases}(n+1)(n+2), n=0,1,2,\ldots,N-1,\\ 0, n\geq N.\end{cases}.$

2.4. $f(n)=1, n=0,1,2,\ldots,$

2.5. $f(n)=\alpha^n, n=0,1,2,\ldots,$

2.6. $f(n)=\alpha\cdot n, n=0,1,2,\ldots,$

2.7. $f(n)=n^{\alpha}, n=0,1,2,\ldots,$

2.8. $f(n)=n^k, n=0,1,2,\ldots,$

2.9. $f(n)=\begin{cases}\dfrac{\alpha^n}{n}, n=1,2,\ldots,N-1,\\ 0, n=0.\end{cases}$.

2.10. $f(n)=\begin{cases}\dfrac{\alpha^n}{n!}, n=0,1,2,\ldots,N-1,\\ 0, n=0.\end{cases}$.

12. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ РЕКУРРЕНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ

12.1. Рекуррентные соотношения

Рекуррентное соотношение называется рекуррентным соотношением порядка k, если $f(n+k)$ можно выразить через $f(n)$, $f(n+1),\ldots, f(n+k-1), k$.

Пример 12.1. Соотношение $f(n+2)=f(n)\cdot f(n+1)-4f(n+1)+2$ - рекуррентное соотношение второго порядка, а $f(n+3)=8f(n)\cdot f(n+2)-f(n+1)+1$ - рекуррентное соотношение третьего порядка. Если задано рекуррентное соотношение k -го порядка, то оно имеет бесконечное множество решений.

Некоторая последовательность является решением данного рекуррентного соотношения, если при её подстановке в соотношение последнее превращается в тождество.

Причем, первые k элементов последовательности можно задать совершенно произвольно - между ними нет никаких соотношений. Но если первые k элементов заданы, то все остальные элементы определяются совершенно однозначно – элемент $f(k+1)$ выражается в силу рекуррентного соотношения через $f(1)$,..., $f(k)$, k ; элемент $f(k+2)$ - через $f(2)$, ..., $f(k+1)$, k ,….

Пример 12.2. Последовательность

$2, 4, 8, \ldots, 2^n$

является одним из решений рекуррентного соотношения

$f(n+2) = 3f(n+1) - 2f(n)$.

В самом деле, общий член этой последовательности имеет вид $f(n)=2^n$. Поэтому $f(n+2)= 2^{n+2}$, $f(n+1)= 2^{n+1}$. Но при любом n имеет место тождество $2^{n+2}=3\cdot 2^{n+1}-2\cdot 2^n$. Поэтому 2^n является решением указанного соотношения.

Решение рекуррентного соотношения k -го порядка называется общим, если оно зависит от k произвольных постоянных $C_1,...,C_к$ и путем подбора этих постоянных можно получить любое решение данного соотношения.

Пример 12.3. Общее решение соотношения

$$f(n+2)= 5f(n+1) - 6f(n) \tag{12.1}$$

будет иметь вид:

$$f(n) = C_1 2^n + C_2 3^n. \tag{12.2}$$

Последовательность (12.2) обращает соотношение (12.1) в тождество. Докажем, что любое решение соотношения (12.1) можно представить в виде (12.2). Но любое решение (12.1) однозначно определяется значениями $f(1)$ и $f(2)$.

Пусть $f(1) = a$, $f(2) = b$. Надо доказать, что для любых чисел a и b найдутся такие значения C_1 и C_2, что система уравнений

$$\begin{cases} 2C_1+3C_2=a \\ 4C_1+9C_2=b \end{cases}$$

имеет решение. Поэтому (12.2) является общим решением соотношения (12.1).

12.2 . Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

Для решения рекуррентных соотношений общих правил не существует. Однако существует весьма часто встречающийся класс соотношений, решаемых однообразным методом. Это - рекуррентные соотношения вида

$$f(n+k) = a_1 f(n+k-1) + a_2 f(n+k-2) + ... + a_k f(n),$$

где $a_1, a_2, ..., a_k$ - некоторые числа. Такие соотношения называются линейными рекуррентными соотношениями с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим, как решаются соотношения вида

$$f(n+2) = a_1 f(n+1) + a_2 f(n). \tag{12.3}$$

Решение таких соотношений основано на следующих двух утверждениях.

Лемма 12.1. Если *f_1 (n)* и *f_2 (n)* являются решениями рекуррентного соотношения (12.3), то при любых *A* и *B* последовательность $f(n)=Af_1(n)+Bf_2(n)$ также является решением этого соотношения. В самом деле, из условий леммы 12.1 имеем

$$\begin{cases} f_1(n+2)=a_1 f_1(n+1)+a_2 f_1(n) \\ f_2(n+2)=a_1 f_2(n+1)+a_2 f_2(n) \end{cases}. \quad (12.4)$$

Умножив равенства системы (12.4) на *A* и *B* соответственно и сложив полученные тождества получим:

$$Af_1(n+2)+Bf_2(n+2)=a_1(Af_1(n+1)+Bf_2(n+2))+a_2(Af_1(n)+Bf_2(n))$$

.Это означает, что $f(n)=Af_1(n+2)+Bf_2(n+2)$ является решением соотношения (12.3).

Лемма 12.2. Если число *r_1* является корнем квадратного уравнения $r^2=a_1r+a_2$, то последовательность $1, r_1, r_1^2, ..., r_1^{n-1}$ является решением рекуррентного соотношения (12.3): $f(n+2)=a_1 f(n+1)+a_2 f(n)$.

Наряду с последовательностью $\{r_1^{n-1}\}$ любая последовательность вида $f(n)=r_1^{n+m}, n=1,2,...,$ также является решением соотношения (12.3). Из лемм 12.1, 12.2 вытекает следующее правило решения линейных рекуррентных соотношений второго порядка с постоянными коэффициентами:

Пусть дано рекуррентное соотношение

$$f_1(n+2)=a_1 f(n+1)+a_2 f(n).$$

Составим квадратное уравнение

$$r^2=a_1r+a_2, \quad (12.4)$$

которое называется характеристическим для данного соотношения. Если это уравнение имеет два различных корня *r_1* и *r_2*, то общее решение рекуррентного соотношения имеет вид

$$f(n)=C_1r_1^{n-1}+C_2r_2^{n-2}. \quad (12.5)$$

Действительно, согласно лемме 12.2 последовательности $f_1(n)=r_1^{n-1}$ и $f_2(n)=r_2^{n-2}$ являются решениями соотношения (12.3). Из леммы 12.1 следует, что последовательность

$f(n)=C_1r_1^{n-1}+C_2r_2^{n-2}$ также является решением (12.3). Надо показать, что любое решение соотношения можно записать в виде (12.5). Но любое решение линейного рекуррентного соотношения второго порядка определяется значениями $f(1)$ и $f(2)$. Поэтому достаточно показать, что система уравнений

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = a \\ c_1r_1 + c_2r_2 = b \end{cases}$$

имеет решение при любых a и b. Этими решениями являются

$$c_1 = \frac{b - ar_2}{r_1 - r_2}, c_2 = \frac{ar_1 - b}{r_1 - r_2}.$$

Пример 12.4. Для последовательности чисел Фибоначчи известно рекуррентное соотношение

$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$. Для него характеристическое уравнение имеет вид $r^2 = r + 1$. Корнями этого квадратного уравнения являются числа

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Поэтому общее решение соотношения Фибоначчи имеет вид

$$f(n) = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.$$

12.3. Случай равных корней характеристического уравнения

Рассмотрим теперь случай, когда оба корня характеристического уравнения $r^2 = a_1r + a_2$ совпадают: $r_1 = r_2$. В этом случае выражение $C_1r_1^{n-1} + C_2r_2^{n-1}$ уже не будет общим решением рекуррентного соотношения (12.3). Из того, что $r_1 = r_2$, решение рекуррентного соотношения (12.3) можно записать в виде

$$f(n) = (C_1 + C_2)r_1^{n-1} = Cr_1^{n-1}, \qquad (12.6)$$

где C - произвольное постоянное число. Число C надо выбрать так, чтобы удовлетворялись два начальных условия: $f(1)=a$, $f(2)=b$, что невозможно.

Поэтому надо найти какое-нибудь другое решение отличное от (12.6). Таким решением рекуррентного соотношения является $f(n)=nr_1^{n-1}$. В самом деле, если квадратное уравнение $r^2=a_1r+a_2$ имеет два совпадающих корня $r_1=r_2$, то по теореме Виета $a_1=2r_1, a_2=-r_1$. Поэтому наше уравнение записывается так: $r^2=2r_1r-r_1^2$. Тогда рекуррентное соотношение имеет такой вид:

$$f(n+2)=2r_1f(n+1)-r_1^2f(n). \qquad (12.7)$$

Проверим, что $f(n)=nr_1^{n-1}$ действительно является решением (12.7). Имеем $f(n+2)=(n+2)r_1^{n-1}$, а $f(n+1)=(n+1)r_1^{n}$. Подставляя эти значения в соотношение (12.4), получим тождество $(n+2)r_1^{n-1}=2(n+1)r_1^{n+1}-nr_1^{n+1}$. Значит, $f(n)=nr_1^{n-1}$ - решение соотношения (12.7). Отсюда следует, что имеем два решения $f_1(n)=r_1^{n-1}$ и $f_2(n)=nr_1^{n-1}$ данного соотношения. Его общее решение имеет вид:

$$f(n)=C_1r_1^{n-1}+C_2nr_1^{n-1}=(C_1+C_2n)r_1^{n-1}.$$

Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами, порядок которых больше двух, решаются таким же способом. Пусть соотношение имеет вид

$$f\ (n+k)=a_1f(n+k-1)+...+a_kf(n).$$

Составим характеристическое уравнение

$$r^k=a_1r^{k-1}+a_2r^{k-2}+...+a_{k-1}r+a_k.$$

Если все корни $r_1,r_2,...,r_k$ этого алгебраического уравнения различны, то общее решение имеет вид

$$f(n)=C_1r_1^{n-1}+C_2r_2^{n-1}+...+C_kr_k^{n-1}.$$

Если $r_1=r_2=...=r_s=k$, то этому корню соответствуют решения

$$f_1(n)=r_1^{n-1},\ f_2(n)=nr_1^{n-1},\ f_3(n)=n^2r_1^{n-1}...,\ f_s(n)=n^{s-1}r_1^{n-1}.$$

рассматриваемого рекуррентного соотношения. В общем решении этому корню соответствует часть

$$f_1(n) = r_1^{\,n-1}\left[C_1 + C_2 n + C_3 n^2 + \ldots + C_s n^{s-1}\right].$$

Вычисляя все корни и складывая их, получим общее решение.

Пример 12.5. Решить рекуррентное соотношение

$$f(n+4) = 5f(n+3) - 6f(n+2) - 4f(n+1) + 8f(n).$$

Решение. Составим характеристическое уравнение: $r^4 - 5r^3 + 6r^2 + 4r + 8 = 0$. Находим его корни

$r_1 = 2, r_2 = 2, r_{3_3} = 2, r_4 = -1$. Отсюда следует, что общее решение имеет вид:

$$f(n) = 2^{n-1}\left[C_1 + C_2 n + C_3 n^2\right] + C_4(-1)^{n-1}.$$

Задачи и упражнения

1. Написать первые пять членов решения рекуррентного соотношения $f(n+2) = 2f(n+1) - 3f(n)$, удовлетворяющего заданным начальным условиям:

1) $\begin{cases} f(1)=0 \\ f(2)=1 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} f(1)=-1 \\ f(2)=1 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} f(1)=3 \\ f(2)=0 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} f(1)=2 \\ f(2)=1 \end{cases}$; 5) $\begin{cases} f(1)=2 \\ f(2)=8 \end{cases}$.

2. Проверить, являются ли данные функции решениями рекуррентных соотношений

   a)f(n + 2)= 2f(n +1)- f(n);

   $g_1(n) = 10n$, $g_2(n) = 2n + 1$, $g_3(n) = 3$.

   b)f (n + 2)= 4 f(n +1)- 3f(n);

   $g_1(n) = 2n$, $g_2(n) = 15n - 1$, $g_3(n) = 7$.

3. Найти общее решение рекуррентных соотношений:

   a) f(n + 2) - 7 f(n +1) +12 f (n) = 0;

   b) f(n + 2)+ 3f(n +1) - 10 f(n) = 0;

   c) f(n + 2) - 4f(n +1) +13f(n) = 0;

   d) f(n + 2) + 9f(n) = 0;

   e) f (n + 2) + 4 f (n +1) + 4 f (n) = 0;

   f) f (n + 3) - 9 f (n + 2) + 26 f (n +1) - 24 f (n) = 0;

   g) f (n + 3) + 3f (n + 2) + 3f (n +1) + f (n) = 0;

   h) f (n + 4)+ 4 f (n)= 0.

4. Найти *f (n)*, зная рекуррентное соотношение и начальные члены:

a) $f(n+2) - 5f(n+1) + 6f(n) = 0, f(1) = 1, f(2) = -7;$
b) $f(n+2) - 4f(n+1) + 4f(n) = 0, f(1) = 2, f(2) = 4;$
c) $f(n+2) + f(n+1) + f(n) = 0, f(1) = -1/4, f(2) = -1/2;$
d) $f(n+2) = 2f(n+1) - f(n); f(1) = 2; f(2) = 4;$
e) $f(n+2) = 4f(n+1) + 5f(n); f(1) = 1; f(2) = 5;$
f) $f(n+2) = 6f(n+1) - 9f(n); f(1) = 0; f(2) = 3;$
g) $f(n+2) = 2f(n) - f(n+1); f(1) = 1; f(2) = 2;$
h) $f(n+2) = 8f(n+1); f(1) = 4.$

5. Привести пример линейного рекуррентного соотношения 2-го порядка, среди решений которого имеются следующие функции:

1) $g(n) = 3n$; 2) $g(n) = 3 \cdot 2n - 5n$;
3) $g(n) = 2n - 1$; 4) $g(n) = n - 17$.

6. Найти такую последовательность, что
$f(1) = \cos a, f(2) = \cos 2a$ и $f(n+2) - 2\cos a\, f(n+1) + f(n) = 0.$

7. Найти последовательность такую, что
$f(n+2) + 2f(n+1) - 8f(n) = 2n.$

8. Составить программу решения линейных рекуррентных соотношении I порядка.

9. Составить программу решения линейных рекуррентных соотношении II порядка.

10. Составить программу решения рекуррентных соотношении III порядка.

11. Составить программу решения рекуррентных соотношении IV порядка.

13. ФОРМУЛА СУММИРОВАНИЯ ЭЙЛЕРА

13.1. Формула Эйлера

Одним из лучших методов получения приближенных значений сумм является метод, предложенный Леонардом Эйлером. Он состоит в том, чтобы аппроксимировать конечную сумму интегралом, и во многих случаях позволяет получать приближения с любой степенью точности.

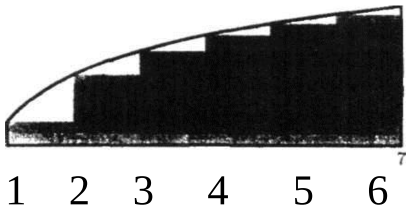


Рис. 13.1. Сравнение суммы с интегралом.

На рис.13. 1 сравниваются $\int_1^n \mathrm{f(x)dx}$ и $\sum_{k=1}^n f(k)$ при $n=7$. Предполагая, что $f(x)$- дифференцируемая функция, с помощью метода Эйлера можно получить удобную формулу для разности между интегралом и суммой.

Введем следующее обозначение:

$$\{x\}=x \bmod 1=x-\lfloor x\rfloor. \qquad (13.1)$$

Начнем выкладки со следующего тождества, применив формулу интегрирования по частям:

$$\int_k^{k+1}\left(\{x\}-\frac{1}{2}\right)\cdot f'(x)dx=\left|\begin{matrix} u=\{x\}-\dfrac{1}{2}; du=dx \\ dv=f'(x)dx; v=f(x)\end{matrix}\right|=\left(x-k-\frac{1}{2}\right)\cdot f(x)\Big|_{\mathrm{k}}^{\mathrm{k}+1}-\int_k^{k+1} f(x)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\big(f(k+1)+f(k)\big)-\int_k^{k+1} f(x)dx. \qquad (13.2)$$

Складывая обе части этого равенства для $1<k<n$ находим, что

$$\int_k^{k+1}\left(\{x\}-\frac{1}{2}\right)\cdot f'(x)dx=\sum_{1\le k\prec n} f(k)+\frac{1}{2}\big(f(n)-f(1)\big)-\int_1^n f(x)dx,$$

т. е.

$$\sum_{1\le k\prec n} f(k)=\int_1^n f(x)dx-\frac{1}{2}\big(f(n)-f(1)\big)+\int_1^n B_2(\{x\})f'(x)dx, \qquad (13.3)$$

где $B_2(\{x\})$ - многочлен, $B_2(\{x\})=x-\frac{1}{2}$. Это и есть искомая формула, связывающая сумму с интегралом. Продолжая интегрировать по частям, можно получать более точные приближения. Но прежде чем это сделать, рассмотрим числа Бернулли, которые являются коэффициентами следующего бесконечного ряда:

$$\frac{z}{e^z-1}=B_0+B_1z+\frac{B_2z^2}{2!}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_kz^k}{k!}. \qquad (13.4)$$

Коэффициенты этого ряда, которые встречаются во многих задачах, были введены Якобом Бернулли и почти в то же время данные числа были открыты Такакузу Секи. Имеем

$$B_0=1, B_1=-\frac{1}{2}, B_2=\frac{1}{6}, B_3=0, B_4=-\frac{1}{30}, \qquad (13.5)$$

Так как функция

$$\frac{z}{e^z-1}+\frac{z}{2}=\frac{z}{2}\frac{e^z+1}{e^z-1}=-\frac{z}{2}\frac{e^z+1}{e^z-1}$$

является четной, то

$$B_3=B_5=B_7=B_9=\ldots=0. \qquad (13.6)$$

Подставляя (13.4) в обе части тождества

$$\frac{z\cdot e^z}{e^z-1}=\frac{z}{e^z-1}+z,$$

раскрывая скобки и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, получим формулу

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}B_k=B_n+\delta_{n1}, \qquad (13.7)$$

где δ_{n1} - символ Кронекера $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & если\ \ i=j\\ 0, & в\ противном\ \ случае\end{cases}$.

Соотношение (13.7) называется соотношением ортогональности для чисел Бернулли. При $n\geq 2$ из него следует рекуррентное соотношение для чисел Бернулли:

$$B_m(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{m}{k}B_kx^{m-k}.$$

Теперь определим многочлен Бернулли

$$B_m(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{m}{k}B_k x^{m-k}\,. \qquad (13.8)$$

Если $m=1$, то $B_1(x)=B_0x+B_1=x-\frac{1}{2}$; этот многочлен использовался выше, в соотношении (13.3). Если $m>1$, то согласно (13.7) $B_1(1)=B_m=B_m(0)$; другими словами, $B_m(\{x\})$ не имеет разрывов при целых значениях x.

Дифференцируя (13.8), находим

$$B'_m(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{m}{k}(m-k)B_k x^{m-k-1}=m\sum_{k=0}^{n}\binom{m-1}{k}B_k x^{m-k-1}=$$

$$=mB_{m-1}(x) \qquad (13.9)$$

и, следовательно, при $m\geq 1$ можем проинтегрировать по частям:

$$\frac{1}{m!}\int_1^n B_m(\{x\})\cdot f^{(m)}(x)dx=\left|\begin{matrix}u=f^{(m)}(x);du=f^{(m+1)}(x)dx\\ dv=B_m(\{x\})dx;v=\dfrac{1}{m+1}B_{m+1}(\{x\})\end{matrix}\right|=\frac{1}{m+1}B_{m+1}(\{x\})f^{(m)}(x)\Big|_1^n-$$

$$-\frac{1}{(m+1)!}\int_1^n B_{m+1}(\{x\})\cdot f^{(m+1)}(x)dx=$$

$$=\frac{1}{(m+1)!}\Big(B_{m+1}(1)f^{(m)}(n)-B_{m+1}(0)f^{(m)}(1)\Big)-\frac{1}{(m+1)!}\int_1^n B_{m+1}(\{x\})\cdot f^{(m+1)}(x)dx\,.$$

С помощью этого результата можно улучшить формулу (13.3) и, воспользовавшись (13.6), получить общую формулу Эйлера

$$\sum_{1\leq k\prec n} f(k)=\int_1^n f(x)dx-\frac{1}{2}\big(f(n)-f(1)\big)+\frac{B_2}{2!}\big(f'(n)-f'(1)\big)+\ldots+$$

$$+\frac{(-1)^m B_m}{m!}\Big(f^{(m-1)}(n)-f^{(m-1)}(1)\Big)+R_{mn}=$$

$$=\int_1^n f(x)dx+\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^k B_k}{k!}\Big(f^{(k-1)}(n)-f^{(k-1)}(1)\Big)+R_{mn}, \qquad (13.10)$$

где

$$R_{mn}=\frac{(-1)^{m+1}}{m!}\int_1^n B_m(\{x\})\cdot f^{(m)}(x)dx\,. \qquad (13.11)$$

Остаток R_{mn} будет мал при очень малых значенях $B_m(\{x\})\cdot f^{(m)}(x)/m!$, и можно показать, что для четного n

$$\left|\frac{B_m(\{x\})}{m!}\right| \le \frac{|B_m|}{m!} < \frac{4}{(2\pi)^m}. \qquad (13.12)$$

С другой стороны, при увеличении m функция $f^{(m)}(x)$ возрастает по модулю, поэтому существует "наилучшее" значение m, при котором | R_{mn} | принимает наименьшее значение (если n фиксировано). Известно, что, когда n четно, существует число θ, такое, что

$$R_{mn} = \theta \frac{B_{m+2}}{(m+2)!}\cdot\left(f^{(m+1)}(n) - f^{(m+1)}(1)\right), 0<\theta<1 \qquad (13.13)$$

при условии, что $\left(f^{(m+1)}(n)\cdot f^{(m+1)}(1)\right) > 0$ для $1<x<n$. В этом случае остаток меньше первого отбрасываемого члена и имеет такой же знак, как и у него.

13.2. Применение формулы Эйлера

1. *Расходимость гармонического ряда.*

Сначала положим $f(x) = \frac{1}{x}$. Производные будут иметь вид $f^{(m)} = (-1)^m \cdot m!/x^{m+1}$, поэтому согласно (13.10) получим

$$H_{n-1} = \theta \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{k}\cdot(-1)^{k-1}\left(\frac{1}{n^k} - 1\right) + R_{mn}. \qquad (13.14)$$

Тогда

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}(H_{n-1} - \ln n) = \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{k}\cdot(-1)^{k-1} + \lim_{n\to\infty} R_{mn}, \qquad (13.15)$$

Из того, что существует предел $\lim_{n\to\infty} R_{mn} = \pm\int_1^\infty B_m(x)dx/x^{m+1}$, следует, что существует константа γ. Тогда на основании (13.14) и (13.15) получаем общую приближенную формулу для гармонических чисел:

$$H_{n-1} = \ln n + \gamma + \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}B_k}{kn^k} + \int_n^\infty \frac{B_m(\{x\})dx}{x^{m+1}} =$$

$= \ln n + \gamma + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-1)^{k-1}B_k}{kn^k} + o\left(\frac{1}{n^m}\right)$. Заменив m на $m+1$, получим

$$H_{n-1}=\ln n+\gamma+\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}B_k}{kn^k}+o\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right). \qquad (13.16)$$

Из (13.13) видно, что погрешность меньше первого отбрасываемого члена. В качестве частного случая (добавляя к обеим частям $1/n$) получим

$$H_n=\ln n+\gamma+\frac{1}{2n}-\frac{1}{13n^2}+\frac{1}{120n^4}-\varepsilon, 0<\varepsilon<\frac{B_6}{6n^6}=\frac{1}{252n^6}.$$

При увеличении k числа Бернулли становятся очень большими (приблизительно $(-1)^{1+k/2}2\left(k!/(2\pi)^k\right)$, если k - четно). Поэтому ни при каком фиксированном значении n ряд, полученный из (13.16) при $m\to\infty$ сходиться не будет.

2. ***Приближенная формула Стирлинга***.

Пусть $f(x)=\ln x$ и из (13.10) получим

$$\ln(n-1)!=n\ln n-n+1-\frac{1}{2}\ln n+\sum_{k=2}^{m}\frac{(-1)^k B_k}{k(k-1)}\left(\frac{1}{n^k}-1\right)+\lim_{n\to\infty}R_{mn}.$$

Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\ln n!-n\ln n+n-\frac{1}{2}\ln n\right)=1+\sum_{k=2}^{m}\frac{(-1)^{k+1}B_k}{k(k-1)}+\lim_{n\to\infty}R_{mn}=\sigma,$$ где σ - постоянная Стирлинга, существует. В результате получим

$$\ln n!+n\ln n-n+\frac{1}{2}\ln n+\sigma+\sum_{k=2}^{m}\frac{(-1)^{k1}B_k}{k(k-1)n^{k-1}}+\lim_{n\to\infty}R_{mn}+O\left(\frac{1}{n^m}\right)=\sigma.$$

Пусть $m=5$, тогда $\ln n!=\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n-n+\sigma+\frac{1}{12n}-\frac{1}{360n^3}+O\left(\frac{1}{n^5}\right).$

После потенцирования с учетом $e^{\sigma}=\sqrt{2\pi}$, и разложив экспоненту в ряд, получим

$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\exp\left\{\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}-\frac{139}{51840n^3}-\frac{571}{2488320n^4}O\left(\frac{1}{n^5}\right)\right\}.$$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов. М.:Техносфера, 2003.-320с.
2. Меньшиков М.В., Ревякин А.М., Копылова А.Н., Макарова Ю.Н., Стечкин Б.С. Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения. Учебное пособие/ Под ред. К.А. Рыбникова. М.:Наука,1982.-368с.
3. Яблонский, С.В. Введение в дискретную математику: учеб. пособие для вузов/ С.В. Яблонский. - 3-е изд., стер. - М.: Высш. шк., 2001. - 384с.
4. Сачков В.Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. М.: Наука.1982.-284с.
5. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Т.1. Основные алгоритмы. М: Мир,1976. Т. II. Получисленные алгоритмы. М: Мир,1977. Т. III. Сортировка и поиск. М: Мир,1978.
6. Кузнецов О.П. Дискретная математика для инженера/ О.П. Кузнецов. - Изд. 3-е, перераб. и доп. - СПб. Лань, 2004. - 394 с.
7. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. /СПб: Питер. 2000. - 304с.
8. Спирина, М.С. Дискретная математика: учебник/ М.С. Спирина, П.А. Спирин. - М.: ACADEMIA, 2004. - 367 с.
9. Пугач Л.И. Высшая математика. Задачи по дискретной математике, математической логике и теории алгоритмов : метод. указания к практическим занятиям для студентов 1 курса специальностей 220400 "Программное обеспечение", "22300 " Системы автоматизированного проектирования" и 075300 "Организация и технология защиты информации"/ Л.И. Пугач ; БГТУ. - Брянск: Изд-во БГТУ, 2005. - 16 с.
10. Асеев Г.Г. Дискретная математика: учеб. пособие/ Г.Г. Асеев, О.М. Абрамов, Д.Э. Ситников. - Ростов н/Д; Харьков: Феникс: Торсинг, 2003. - 141 с.
11. Акимов О.Е. Дискретная математика: логика, группы, графы. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 376 с.

12. Лавров И. А., Максимова Л. Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. — М.: Физ. Мат.лит., 2004. -256 с.
13. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера. - М.: Энергоатомиздат, 1988 – 480с.
14. Аляев Ю.А. Тюрин С.Ф. Дискретная математика и математическая логика. — М.: Финансы и статистика, 2006. - 368 с.
15. Андерсон, Джеймс А. Дискретная математика и комбинаторика. - Пер. с англ. — М.: Издатель - Издательский дом "Вильямс", 2004. — 960 с.
16. Виленкин Н.Я Комбинаторика. - М., Наука, 1969. -328 с.

Дополнительная

1. Белоусов, А.И. Дискретная математика: учебник/ А.И. Белоусов, С.Б. Ткачев; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. - М.: МГТУ им Н.Э. Баумана, 2001. - . вып. 19. - 743с.
2. Горбатов, В.А. Основы дискретной математики: учеб. пособие для вузов/ В.А. Горбатов. - М.: Высш. шк., 1986. - 310 с.
3. Горбатов, В.А Дискретная математика: учебник для студентов втузов/ В.А. Горбатов, А.В. Горбатов, М.В. Горбатова - М.: АСТ, Астрель, 2003. - 447 с.
4. Фалевич, Б.Я. Теория алгоритмов: учеб. пособие/ Б.Я. Фалевич. - М.: Машиностроение, 2004. - 160 с.
5. Введение в криптографию: Новые математические дисциплины./ В.В. Ященко [и др.]; под ред. В.В. Ященко. - СПб. и др.: МЦНМО: Питер, 2001. - 287с.

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА
(теория, решение задач, программирование)

Учебное пособие

План университета 2016, поз. 14

Редактор Н.В. Ефрюкова
Корректор Х.Д. Шунгаров
Компьютерная вёрстка и набор С.А. Бостанова

Подписано в печать 23.12.2016
Формат 60х84/16
Бумага офисная
Объем: 7,5 усл. печ.л.
Тираж 100 экз.

Издательство Карачаево-Черкесского государственного университета им. У.Д. Алиева: 369202,
г. Карачаевск, ул. Ленина, 29
Лицензия ЛР № 040310 от 21.10.1997.

Отпечатано в типографии Карачаево-Черкесского государственного университета им. У.Д. Алиева: 369202.
г. Карачаевск, ул. Ленина, 46